

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角形の面積のいろいろな出し方をマスターしよう

□三角形の面積

△ABCにおいて、頂点Cから辺AB
またはその延長に下ろした垂線をCHとすると

△ABCの高さhは $h = CH$ であり

$$\sin A = \frac{h}{b} \text{ なので } h = b \sin A \quad \text{高さはサインで}$$

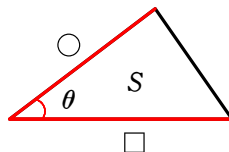
である。よって、△ABCの面積Sは $S = \frac{1}{2} \times c \times b \sin A$ 三角形の面積 = $\frac{1}{2}$ × 底辺 × 高さ

一般に、三角形の面積について、次のことが成り立つ。

三角形の面積

△ABCの面積Sは、次の式で表される。

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{○} \cdot \text{□} \cdot \sin \theta$$



※ 三角形の面積Sは、 $\frac{1}{2}$ 掛けることのはさむ辺掛けるはさむ辺掛ける間の角のサイン(正弦)。

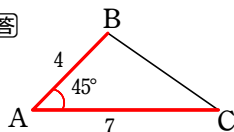
例10+α) 次のような△ABCの面積Sを求めよ。

(1) $b = 4, c = 7, A = 45^\circ$

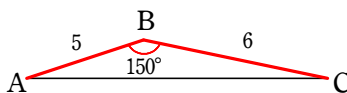
(2) $a = 6, c = 5, B = 150^\circ$

(3) 1辺の長さがaである正三角形

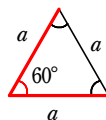
【解答】



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

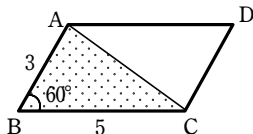


$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{aligned}$$

練習) 次の図形の面積を求めよ。

多角形は三角形に分割する!

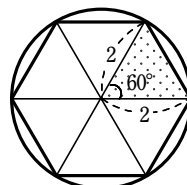
(1) $AB = 3, BC = 5,$
 $\angle B = 60^\circ$ である
平行四辺形 ABCD



【解答】 対角線 AC で、平行四辺形 ABCD を 2 つの三角形
△ABC と △ACD に分けて考えると $\triangle ABC = \triangle ACD$
よって $S = 2 \times \triangle ABC$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(2) 半径 2 の円に内接する
正六角形



【解答】 この正六角形は 1 辺の長さが 2 の
正三角形 6 個に分けることができる。

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= 6 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

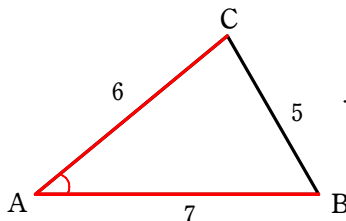
○3辺のみ分かっている場合は

余弦定理でコサインを出す→相互関係でサインに変える→面積計算

例題14) $\triangle ABC$ において、 $a=5$, $b=6$, $c=7$ のとき、この三角形の面積 S を求めよ。

【解答】 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} \\ &= \frac{60}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$



$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{7^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$$

○3辺のみ分かっている場合の裏技として「ヘロンの公式」というものがある。使い分けよう。

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$2s = a + b + c \text{ とすると } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例題14) $\triangle ABC$ において、 $a=5$, $b=6$, $c=7$ のとき、この三角形の面積 S を求めよ。

【解答】 $2s = 5 + 6 + 7 = 18$ より $s = 9$

よってヘロンの公式より

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{9 \cdot (9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ としてもよい}$$

和が偶数のときは簡単
和が奇数のときは分数になるので注意

気になる人は【証明】

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \cos^2 A} \quad \left\{ \text{相互関係 } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ より } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \right.$$

$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} \quad \left\{ \cos A \text{ から始まる余弦定理で辺の長さに統一} \right.$$

$$= \frac{1}{2}bc \cdot \frac{1}{2bc} \sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \quad (\because 2bc > 0) \quad \left\{ \text{通分して分母のみルートの外へ} \right.$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[2bc + (b^2 + c^2 - a^2)][2bc - (b^2 + c^2 - a^2)]} \quad \left\{ \text{〇}^2 - \Delta^2 = (\text{〇} + \Delta)(\text{〇} - \Delta) \text{ を繰り返す} \right.$$

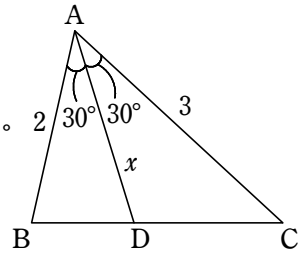
$$= \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} = \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+a)(b+c-a)][(a+b-c)(a-b+c)]}$$

ここで、 $a+b+c=2s$ とおくと $b+c-a=2(s-a)$, $a+b-c=2(s-c)$, $a-b+c=2(s-b)$

$$\text{よって } S = \frac{1}{4} \sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-b)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

□いろいろな図形の計量

応用例題3) $\triangle ABC$ において、 $AB=2$, $AC=3$, $A=60^\circ$ とし、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。線分 AD の長さを求めよ。



○面積の和 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ であることを利用する方法

解答 $AD = x$ とおく。

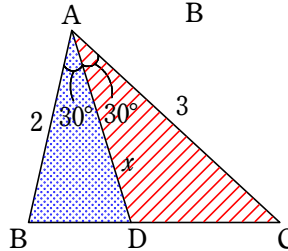
$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \sin 30^\circ$$

ゆえに $6\sqrt{3} = 2x + 3x$

よって $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ すなわち $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$



別解 ○余弦定理を多用する方法

解答 $\triangle ABC$ で余弦定理より $BC^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$

$BC > 0$ であるから $BC = \sqrt{7}$

角と二等分線の性質により $BD : DC = BA : AC = 2 : 3$ であるから

$$BD = \frac{2}{5} BC = \frac{2\sqrt{7}}{5}, \quad CD = \frac{3\sqrt{7}}{5}$$

$\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\cos B = \frac{4 + 7 - 9}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$\triangle ABD$ で余弦定理より

$$x^2 = 4 + \frac{28}{25} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{5} \cos B$$

$$= \frac{128}{25} - \frac{4}{5} = \frac{108}{25}$$

$x > 0$ であるから $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

すなわち $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

$\triangle ABD$ で余弦定理より

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 30^\circ$$

$$\frac{28}{25} = 4 + x^2 - 2\sqrt{3}x$$

$$25x^2 - 50\sqrt{3}x + 72 = 0$$

より $x = \frac{25\sqrt{3} \pm \sqrt{25^2 \cdot 3 - 25 \cdot 72}}{25}$

$$= \frac{25\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{25}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{5}, \frac{4\sqrt{3}}{5} \quad (= 1.38\dots, 2.07\dots)$$

ここで $\triangle ADC$ の成立条件から

$$\left| 3 - \frac{3\sqrt{7}}{5} \right| < x < 3 + \frac{3\sqrt{7}}{5}$$

$$\frac{15 - 2\sqrt{7}}{5} < x < \frac{15 + 2\sqrt{7}}{5}$$

$$(1.41\dots < x < 4.58\dots)$$

よって $x = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

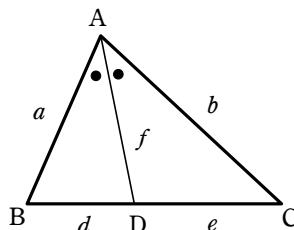
すなわち $AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

マニアックですが

$$(a+b)f = 2abc \cos \frac{A}{2}$$

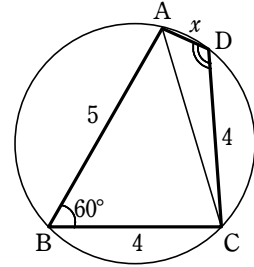
$$f^2 = ab - de$$

などを検算に用いることも



応用例題4) 円に内接する四角形 ABCD において、

AB=5, BC=4, CD=4, ∠B=60° とする。次のものを求めよ。

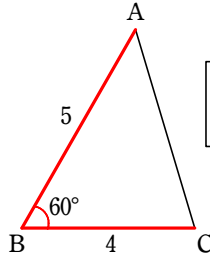


(1) ACの長さ

【解答】 △ABC に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60^\circ \\ &= 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 25 + 16 - 20 = 21 \end{aligned}$$

AC>0 であるから AC=√21



必要な図を
抜き出す

(2) ADの長さ

【解答】 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

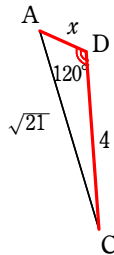
AD = x として、△ACD に余弦定理を使うと

$$21 = 16 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cos 120^\circ$$

$$\text{よって } 21 = 16 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{整理して } x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x-1)(x+5) = 0 \text{ を解いて } x=1, -5 \quad x>0 \text{ であるから } x=1 \text{ すなわち } AD=1$$



円に内接する四角形では、
向かい合う角の和は 180°
∠B + ∠D = 180°より
∠D = 180° - ∠B

分かった値は書き込む

(3) 四角形 ABCD の面積

【解答】 四角形 ABCD の面積を S とすると

多角形の面積は三角形の和

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

下線部は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(20+4) \text{ とくくるのもあり}$$

【補足】 円に内接する四角形のとき $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ただし $2s = a + b + c + d$ という

ブラーマグプタの公式というものもある（ヘロンの公式はこのうちの1辺の長さが0のとき）。チャートの参考事項に証明あり。

任意の四角形についてはブレドシュナイダーの公式というものがあるので興味がある人は調べてみよう。

【類題】 円に内接する四角形 ABCD において、AB=5, BC=4, CD=4, DA=2

のとき、ACの長さを求めよ。

今回は角度が分からないのでθを用いる

【解答】 ∠B = θ とおくと ∠D = 180° - θ

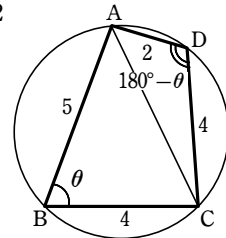
$$\begin{aligned} AC^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos \theta \\ &= 25 + 16 - 40 \cos \theta \quad \text{①} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} AC^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times (-\cos \theta) \quad \text{②} \end{aligned}$$

$$\text{①②より } 20 + 16 \cos \theta = 41 - 40 \cos \theta \text{ より } 56 \cos \theta = 21 \quad \therefore \cos \theta = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{8} \text{ を②に代入して } AC^2 = 20 + 16 \cdot \frac{3}{8} = 20 + 6 = 26 \quad AC > 0 \text{ なので } AC = \sqrt{26}$$



□三角形の内接円と面積

右の図のように、1つの円が△ABCの3辺すべてに接しているとき、この円を△ABCの**内接円**という。

△ABCの内接円の中心をIとすると、

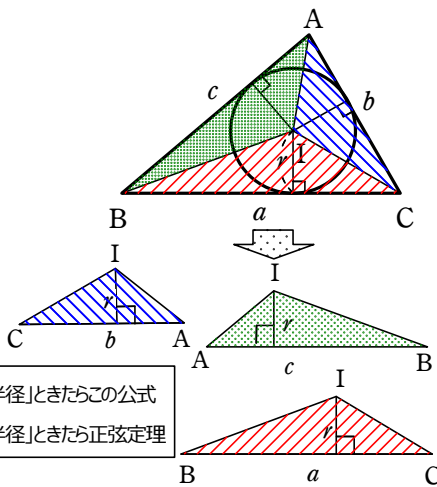
$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot a + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b + \frac{1}{2} \cdot r \cdot c \end{aligned}$$

△ABCの面積をS、

△ABCの内接円の半径をrとすると

$$S = \frac{1}{2} r(a + b + c)$$

「内接円の半径」ときたらこの公式
「外接円の半径」ときたら正弦定理



応用例題5) a=5, b=6, c=3である

△ABCの内接円の半径rを求めよ。

方針) まずは「面積」を求める

→ 「内接円の半径を含む面積公式」に当てはめていく

解答

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{36 + 9 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 3} \\ &= \frac{20}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

sin A > 0 であるから

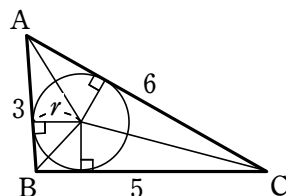
$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{81}{9^2} - \frac{25}{9^2}} \\ &= \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \end{aligned}$$

△ABCの面積をSとすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{14}}{9} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

また $S = \frac{1}{2} r(3 + 6 + 5) = 7r$

よって、 $7r = 2\sqrt{14}$ より $r = \frac{2\sqrt{14}}{7}$



余弦定理
→ 相互関係
→ 面積公式

ヘロンの公式

△ABCの面積Sは

$2s = a + b + c$ とすると

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

どちらかで
求める

$2s = 3 + 6 + 5 = 14$ より

$s = 7$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)} \\ &= \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

深める) 三次元(立体)だと
どのようなことになるか
まわりと相談してみよう

赤チャート数学I 練習107)

面積が1であるような $\triangle ABC$ の辺 AB, BC, CA 上に点 D, E, F を

$$AD : DB = t : (1-t), \quad BE : EC = 2t : (1-2t), \quad CF : FA = 3t : (1-3t)$$

となるようにとる。ただし、 $0 < t < \frac{1}{3}$ とする。 $\triangle DEF$ の面積を S とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) S を t を用いて表せ。 (2) S が最小となる t の値を求めよ。

最大・最小の話 → 方針を想定しておく

解答

- (1) $BC = a, CA = b, AB = c$ とすると

$$AF = (1-3t)b, \quad AD = tc, \quad BD = (1-t)c,$$

$$BE = 2ta, \quad CE = (1-2t)a, \quad CF = 3tb$$

と表される。よって

$$S = \triangle ABC - \triangle ADF - \triangle BED - \triangle CFE$$

$$= 1 - \frac{1}{2}bct(1-3t)\sin A - \frac{1}{2} \cdot 2cat(1-t)\sin B - \frac{1}{2} \cdot 3abt(1-2t)\sin C$$

ここで、 $\frac{1}{2}bcsin A = \frac{1}{2}casin B = \frac{1}{2}absin C = \triangle ABC = 1$ であるから

$$S = 1 - t(1-3t) - 2t(1-t) - 3t(1-2t) \\ = 11t^2 - 6t + 1$$

2次関数の最大・最小へ

- (2) (1) から $S = 11t^2 - 6t + 1$

$$= 11\left(t - \frac{3}{11}\right)^2 + \frac{2}{11}$$

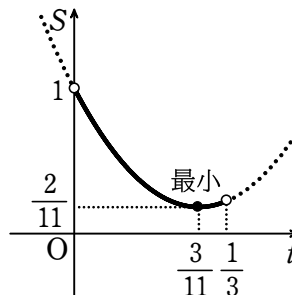
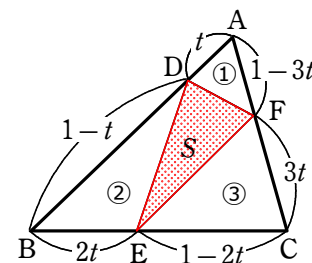
頂点 $\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)$, 下に凸

$$t = 0 \text{ のとき } S = 1$$

$$t = \frac{1}{3} \text{ のとき } S = \frac{11}{9} - 2 + 1 = \frac{2}{9}$$

よって $0 < t < \frac{1}{3}$ の範囲において、

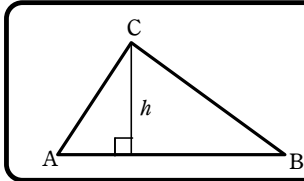
S は $t = \frac{3}{11}$ のとき最小となる。



まとめ~△ABCの面積S

△ABCの外接円の半径をR, 内接円の半径をr,

∠A, ∠B, ∠C内の傍接円の半径をそれぞれ r_A, r_B, r_C , $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ とする。



$$S = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

○高さhを $h = b \sin A$ にすると

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

○正弦定理 $2R = \frac{a}{\sin A}$ より

$$\sin A = \frac{a}{2R} \text{ なので}$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

○相互関係と余弦定理、因数分解により

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

○正弦定理

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ より}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A},$$

$$b = 2R \sin B, c = 2R \sin C \text{ であり}$$

$$A + B + C = 180^\circ,$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ なので}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$$

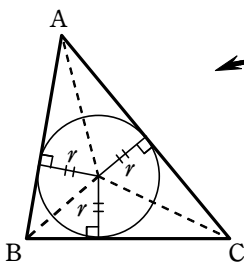
○正弦定理 $2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ より

$$b = 2R \sin B, c = 2R \sin C \text{ なので}$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

○内接円の話になったら

$$S = \frac{1}{2} r(a+b+c) = rs$$

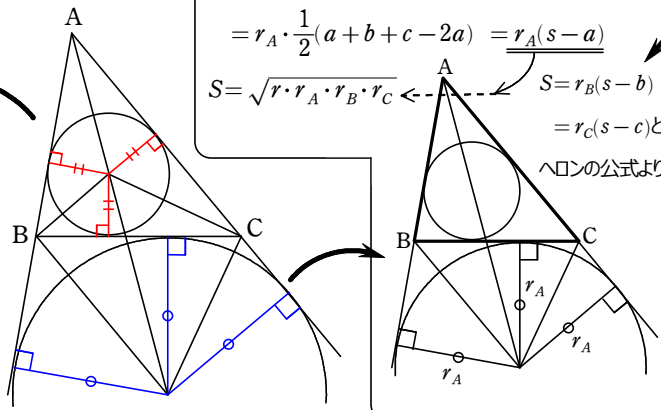


○傍接円の話になったら

$$S = \frac{1}{2} cr_A + \frac{1}{2} br_B - \frac{1}{2} ar_A$$

$$= r_A \cdot \frac{1}{2}(a+b+c-2a) = \frac{r_A(s-a)}{1}$$

$$S = \sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C} \leftarrow S = r_B(s-b) = r_C(s-c) \text{ とヘロンの公式より}$$



※ 図形と方程式やベクトルを学習すると、更に増えていきます