図形と計量【空間図形への応用】 p.168～170

青チャートⅠ：例題169～174

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】空間図形での三角比の活用の仕方をマスターしよう

□空間図形への応用 ～ 空間（図形）は平面（図形）で考える

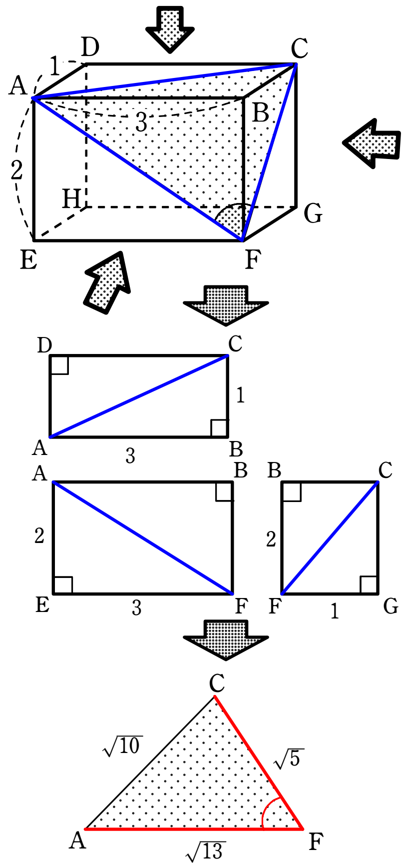
応用例題６） 右の図のような　AB＝3，AD＝1，AE＝2

である直方体 ABCD－EFGH がある。

△AFC の面積 S を求めよ。

(ex) 三角錐 ACFB の体積 V を求めよ。

(ex) B から △AFC に下ろした垂線 HK の長さを求めよ。



解答　三平方の定理により

$AF^2=AB^2+BF^2=3^2+2^2=13$

$CF^2=BC^2+BF^2=1^2+2^2=5$

$AC^2=AB^2+BC^2=3^2+1^2=10$

よって，△AFC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle AFC=\frac{13+5-10}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$\sin\angle AFC>0$ より

$$\sin\angle AFC=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}=\frac{7}{\sqrt{65}}$$

したがって，△AFC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot CF\sin\angle AFC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}}=\frac{7}{2}$$

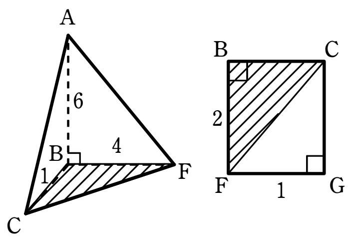
ド・グアの定理（デカルト・グアの定理）というものもある。（ピタゴラスの定理の三次元版なので四平方の定理とも。検算などに）

$$(\triangle AFC)^2=(\triangle ABF)^2+(\triangle BCF)^2+(\triangle ABC)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

(3)　△CBF の面積は　$\triangle CBF=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$

よって三角錐 ACFB の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle CBF\cdot AB=\frac{1}{3}\cdot1\cdot3=1$$

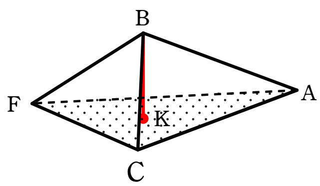


(4) 三角錐 ACFB の体積 V は

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle AFC\cdot BK$ とも表すことができるので

$$1=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot BK$$

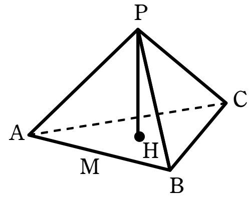
$$BK=\frac{6}{7}$$



図形と計量【空間図形への応用】 p.168～170

青チャートⅠ：例題169～174

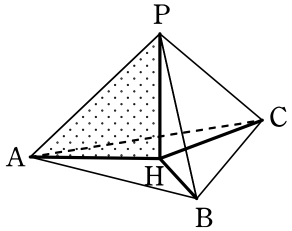
□一般的な四面体の体積 ～ 外接円の半径 または 断面の三角形



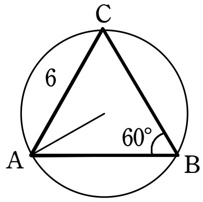
例題） PA＝PB＝PC＝5，AB＝BC＝CA＝6 である四面体PABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点P から△ABC に垂線 PH を下ろす。PH の長さを求めよ。

解答

外接円の半径



△PAH，△PBH，△PCH は
いずれも直角三角形で，
PA＝PB＝PC，PH は共通
であるから，これらの直角三角形は合同である。
よって　AH＝BH＝CH
ゆえに，H は△ABC の外接円の中心である。
AH は△BCD の外接円の半径であるから，
正弦定理により

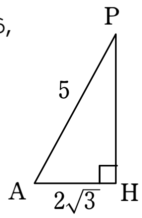


$$2AH=\frac{6}{\sin 60^\circ}$$

よって $AH=\dfrac{6}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

△PAH は直角三角形であるから，
三平方の定理により



$$PH=\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{25-12}=\sqrt{13}$$

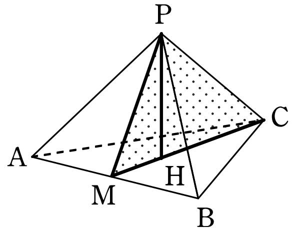
PH が求められると…

△ABC の面積を S とすると $S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot PH=\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}=3\sqrt{39}$

と、体積を求めることができる

断面の三角形

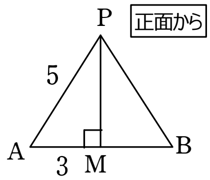


AM＝3 であるから

$PM^2=PA^2-AM^2$
$=5^2-3^2=16$

PM＞0 であるから
PM＝4

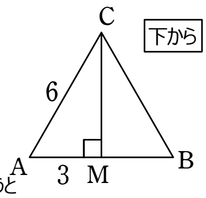
正面から



$CM^2=AC^2-AM^2$
$=6^2-3^2=27$

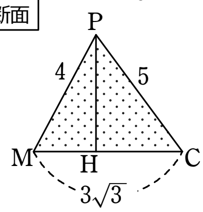
CM＞0 であるから
$CM=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

下から



△PCM に余弦定理を使うと

断面



$$\cos\angle PMC=\frac{16+27-25}{2\cdot4\cdot3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{18}{2\cdot4\cdot3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3}{4\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

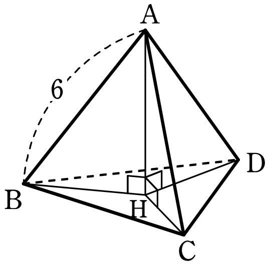
sin ∠PMC＞0 であるから

$$\sin\angle PMC=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{48}{48}-\frac{9}{48}}=\frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

$\sin\angle PMC=\dfrac{PH}{PM}$ より

$$PH=PM\cdot\sin\angle PMC$$
$$=4\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}$$
$$=\sqrt{13}$$

□正四面体の体積 ～ 外接円の半径 または 重心の活用



応用例題７） 1 辺の長さが 6 である正四面体 ABCD において，頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす。

(1) H は △BCD の外接円の中心であることを示せ。

(2) AH の長さを求めよ。

(3) 正四面体 ABCD の体積 V を求めよ。

どちらの解き方でも良いですが、教科書は「外接円の半径」で解いています。

解答 (1) △ABH，△ACH，△ADH はいずれも直角三角形で，　AB＝AC＝AD，　AH は共通であるから，これらの直角三角形は合同である。　よって　BH＝CH＝DH

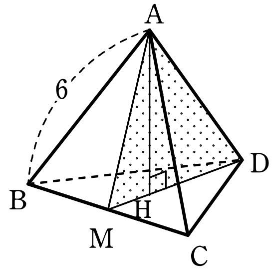
ゆえに，H は △BCD の外接円の中心である。

(2) BH は △BCD の外接円の半径であるから，正弦定理により　$\dfrac{6}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}$　よって　$\mathrm{BH}=2\sqrt{3}$

△ABH は直角三角形であるから，三平方の定理により　$\mathrm{AH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

(3) △BCD の面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$

よって　$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{AH}=\dfrac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$



正四面体のとき、(2) は次のように解くことができます。

解答 (2) △ABC は正三角形であるから，BC の中点を M とすると

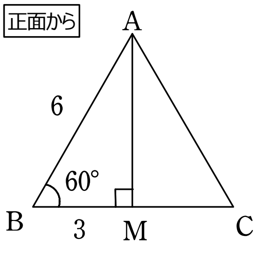
BM＝3　であり　△ABM は 1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形であるから

AB：AM＝2：$\sqrt{3}$　なので　$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}=3\sqrt{3}$

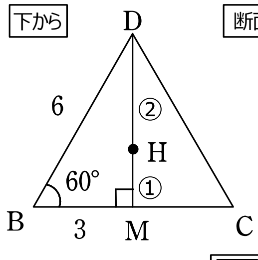
同様にして　$\mathrm{DM}=3\sqrt{3}$

したがって　断面の△AMD はAM＝DM の二等辺三角形である

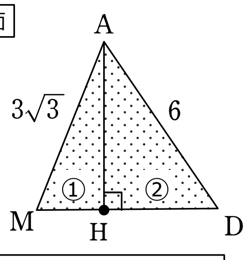
正面から

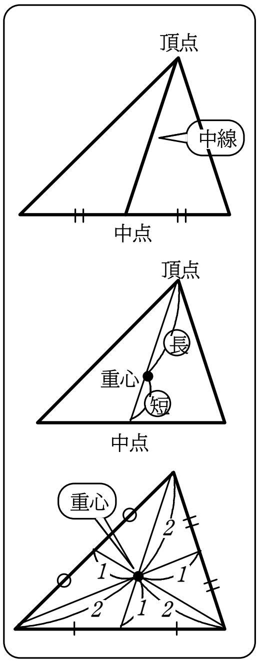


下から



断面





ここで　**点H は△BCD の重心**　であるから，

MH：HD＝1：2 に内分するので

$\mathrm{MH}=\dfrac{1}{3}\mathrm{DM}=\dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

$\mathrm{HD}=\dfrac{2}{3}\mathrm{DM}=\dfrac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

△ADH で三平方の定理により

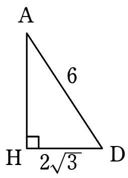
$\mathrm{AH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{36-12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

性質　三角形の重心

[1]　三角形の 3 つの中線は，1 点で交わる。

[2]　その点は，各中線を 2：1 に分ける。

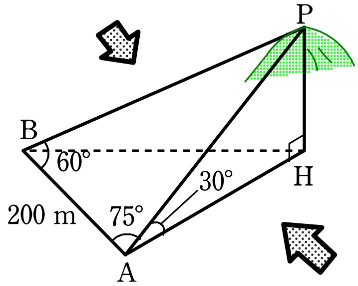


図形と計量【空間図形への応用】 p.168～170

青チャートⅠ：例題169～174

○三角比を用いて，直接測ることのできない山の高さなどを求めてみよう。

応用例題８） 200 m 離れた 2 地点 A，B から，
山頂 P を見ると，$\angle \mathrm{PAB}=75^\circ$，$\angle \mathrm{PBA}=60^\circ$
であり，地点 A から山頂 P を見た仰角は 30° であった。
山頂 P と地点 A の標高差 PH を求めよ。



解答　$\triangle \mathrm{APB}$ において

$$\angle \mathrm{APB}=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$$

であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin 60^\circ}=\frac{200}{\sin 45^\circ}$$

ツーペアの正弦定理

両辺に　$\times \sin 60^\circ$

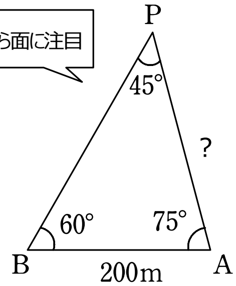
よって　$\mathrm{AP}=\dfrac{200}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ$

$$=200\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の逆数を掛ける

$$=100\sqrt{6}$$

上から面に注目



$\triangle \mathrm{PAH}$ は $\angle \mathrm{AHP}=90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{PH}=\mathrm{AP}\sin 30^\circ$$

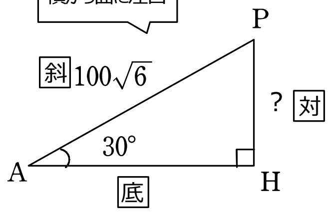
$$=100\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=50\sqrt{6}$$

三角比の定義より
$\sin\theta=\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$

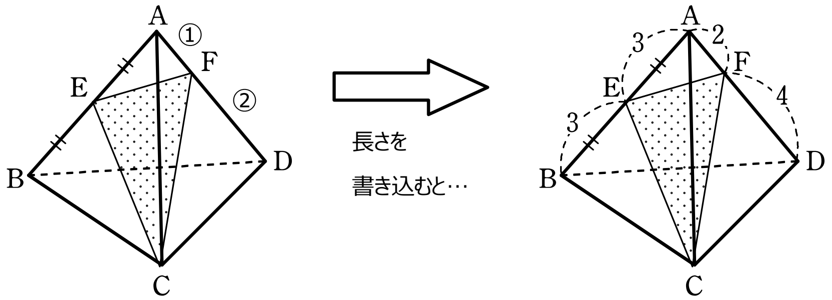
答　$50\sqrt{6}$ m

横から面に注目



問題の終盤でも、最初に習った
三角比の定義を使うことも多い
直角三角形が出てきたら要注意

問題９）１辺の長さが６の正四面体 ABCD において，辺 AB の中点を E，辺 AD を１：２に分ける点を F とする 。△CEF の面積を求めよ。



解答

$$\mathrm{EF}^2=\mathrm{AE}^2+\mathrm{AF}^2-2\times\mathrm{AE}\times\mathrm{AF}\times\cos 60^\circ$$
$$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=7$$

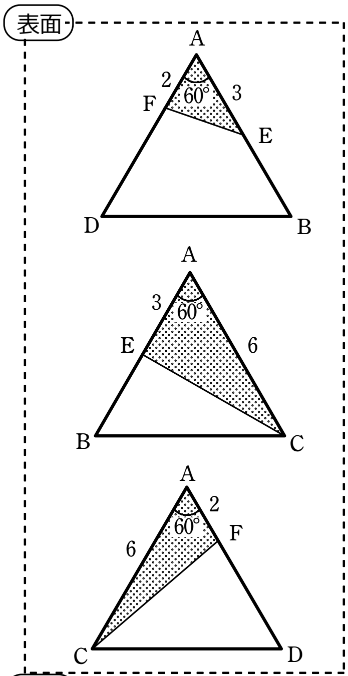
EF＞0 であるから　$\mathrm{EF}=\sqrt{7}$

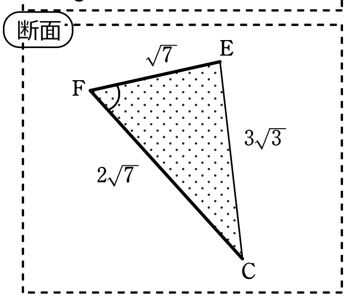
$$\mathrm{EC}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BE}^2-2\times\mathrm{BC}\times\mathrm{BE}\times\cos 60^\circ$$
$$=6^2+3^2-2\times6\times3\times\frac{1}{2}=27$$

EC＞0 であるから　$\mathrm{EC}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$$\mathrm{FC}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AF}^2-2\times\mathrm{AC}\times\mathrm{AF}\times\cos 60^\circ$$
$$=6^2+2^2-2\times6\times2\times\frac{1}{2}=28$$

FC＞0 であるから　$\mathrm{FC}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$





よって△CEF について余弦定理について

$$\cos\angle\mathrm{EFC}=\frac{\sqrt{7}^{\,2}+(2\sqrt{7})^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{7}\times2\sqrt{7}}$$
$$=\frac{7+28-27}{4\cdot7}=\frac{8}{4\cdot7}=\frac{2}{7}$$

sin ∠EFC＞0 なので

相互関係より　$\sin\angle\mathrm{EFC}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

したがって　$\triangle\mathrm{CEF}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\cdot\sin\angle\mathrm{EFC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}=3\sqrt{5}$

図形と計量【空間図形への応用】 p.168～170

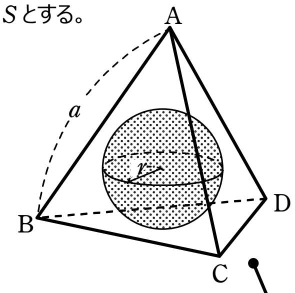
青チャートⅠ：例題169～174

演習問題B１０） 1辺の長さが a の正四面体 ABCD の体積を V，表面積を S とする。

(1) 体積 V を求めよ。

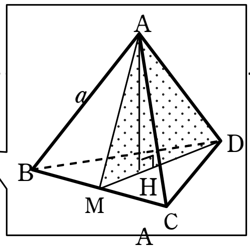
(2) この四面体に内接する球の半径を r とすると，$V=\frac{1}{3}rS$ が成り立つことを示せ。

(3) 内接する球の半径 r と体積 V' を求めよ。→$\boxed{\text{補題}}$ 球の表面積を求めよ。



$\boxed{\text{解答}}$

(1) 頂点 A から底面の 正三角形 BCD に垂線 AH を下ろす



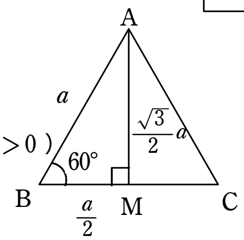
$1:2:\sqrt{3}$ より$\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり，同様に $\mathrm{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ である。

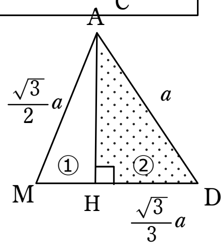
また、MH：HD＝1：2 なので $\mathrm{HD}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

△ADH で三平方の定理により

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{HD}^2}=\sqrt{a^2-\frac{3}{9}a^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a \quad (\because\ a>0)$$





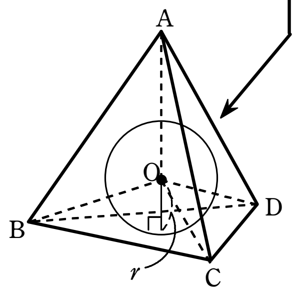
外接円の半径を使った解き方でもよい

△BCD の面積 S は $S=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

正四面体 ABCD の体積は V なので

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

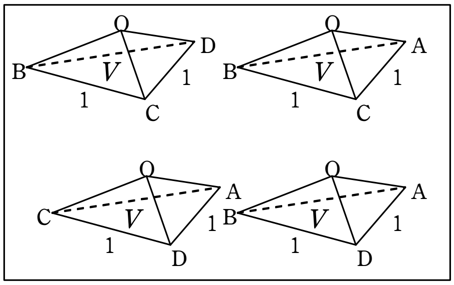


(2) 正四面体 ABCD に内接する球の中心を O とする。

四面体 ABCD は，点 O を頂点とし △ABC，△ACD，△ABD，△BCD を底面とする 4 つの三角錐に分割できる。4 つの三角錐の高さはすべて r となるので

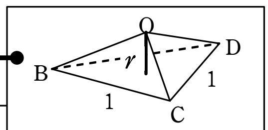
$$V=\frac{r}{3}(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}+\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD})$$

$$=\frac{1}{3}rS$$



(3) (1)，(2) より $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{1}{3}rS$ …… ① また $S=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}a^2$ …… ②

①，② より $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$ ← 球の半径 r と四面体OBCDの高さは等しい



したがって $V'=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{216}\pi a^3$

半径 r の球の
表面積は$S=4\pi r^2$（心配ある事情）
体積は $V=\frac{4}{3}\pi r^3$（身の上に心配あると参上）

$\boxed{\text{補題}}$ 球の表面積は $4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{12}a\right)^2=\frac{\pi}{6}a^2$