数学と人間の活動【約数と倍数】 p.132～135

青チャートA: 例題 110～111

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】何の倍数か判別出来るようになろう

□約数と倍数

○バーコードの仕組み

身近にある商品を見てみると，13 桁の数字が並んだバーコードがあるだろう。バーコードにはこの数字の情報が入っているのだが，この数字には読み取りのミスを判定する仕組みも備わっている。

偽物

0 115212 311902

国コード
メーカーコード
商品アイテムコード
チェックデジット

練習１） 身近にある商品のバーコードの数字について，次の問いに答えよ。

(1) (左から奇数桁目の数の和)＋(左から偶数桁目の数の和)×3 を求めよ。

(2) 他の人が求めた (1) の値とも比較して，気づいたことをいえ。

代表的な１次元バーコードはJAN(EAN)や工業用に広く使われるCODE39，チェーンストア業界や冷凍・チルド食品業界，医療業界で用いられるCode128，物流で用いられるITF，血液銀行や宅配便，図書館の貸し出し管理などで用いられるNW7 などがある。２次元バーコードはQRコードやData Matrixがあげられる。

バーコードの 13 桁の数字について

(左から奇数桁目の数の和)＋(左から偶数桁目の数の和)×3

を計算すると，必ず 10 の倍数になる。左から 12 桁目までの数字は商品ごとに振られたものであるが，最後の 13 桁目の数字は上の計算で求めた値が 10 の倍数になるように振られている。機械で読み取ったときに 10 の倍数にならなかったら，読み取りミスがあったと判定するのである。（チェックデジットという）

このように，約数や倍数が，身の回りでも利用されている。

○約数と倍数

b は a の約数
$$a=bk$$
a は b の倍数

2 つの整数 a，b について，ある整数 k を用いて $\boldsymbol{a=bk}$ と表されるとき，**b は a の約数である**といい，**a は b の倍数**であるという。

$a=bk$ のとき，$a=(-b)\cdot(-k)$ でもあるから，b が a の約数ならば $-b$ も a の約数である。

<注意> $(-b)\cdot(-k)$ における・は，積を表す記号である。

練習２） 次の問いに答えよ。

(1) 18 の約数をすべて求めよ。

1，2，3，6，9，18，−1，−2，−3，−6，−9，−18でもよい

解答 ±1，±2，±3，±6，±9，±18

1×18， 2×9， 3×6 とペアを考えるとよい

(2) 6 の正の倍数を小さいものから 5 個求めよ。

正の数に０は入れない

解答 6，12，18，24，30

例） a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

（仮定）⇒（結論）
仮定を用いて、結論を導く

(1) a，b が 5 の倍数ならば，$a+b$ は 5 の倍数である。

解答 a，b は 5 の倍数であるから，整数 k，l を用いて

$$a=5k,\quad b=5l$$

と表される。

「5の倍数 ⟹ 5×□とかける」

よって $a+b=5k+5l=5(k+l)$

「5×□とかける ⟹ 5の倍数」

$k+l$ は整数であるから，$a+b$ は 5 の倍数である。

(2) a，$a+b$ が5の倍数ならば，b は5の倍数である。

解答 a，$a+b$ は5の倍数であるから，整数 k，l を用いて

$a=5k$，　$a+b=5l$

と表される。

よって　$b=5l-a=5l-5k=5(l-k)$

$l-k$ は整数であるから，b は5の倍数である。

「5の倍数 ⟹ 5× $\boxed{}$ とかける」

「5× $\boxed{}$ とかける ⟹ 5の倍数」

○倍数の判定法

2，4，5，8，10 の倍数については，次のような判定法がある。

倍数の判定法 (1)

2 の倍数 …… 一の位が 0，2，4，6，8 のいずれか

4 の倍数 …… 下 2 桁が 4 の倍数　　8 の倍数 …… 下 3 桁が 8 の倍数

5 の倍数 …… 一の位が 0 か 5　　10 の倍数 …… 一の位が 0

上の方法で判定できる理由を考えよう。簡単のため，4 桁の自然数で考えることにする。

4 桁の自然数 N は，千の位を a，百の位を b，十の位を c，一の位を d とすると，

$N=1000a+100b+10c+d$ で表される。

● 2 の倍数，5 の倍数，10 の倍数の判定法

N の式を変形すると　$N=10(100a+10b+c)+d$

$10=2\cdot5$ より，$10(100a+10b+c)$ は 2 の倍数であるから，N が 2 の倍数になるのは一の位 d が 2 の倍数，すなわち 0，2，4，6，8 のときである。（5 の倍数，10 の倍数の判定法も同じようにして説明できる。）

● 4 の倍数の判定法

N の式を変形すると　$N=100(10a+b)+10c+d$

$100=4\cdot25$ より，$100(10a+b)$ は 4 の倍数であるから，

N が 4 の倍数になるのは $10c+d$ すなわち 下 2 桁が 4 の倍数のときである。

補足 自然数 N の下 2 桁が表す数を a とすると，$N-a$ は 100 の倍数であるから負でない整数 k を用いて $N-a=100k$ と表すことができる。よって $N=100k+a$ となる。a が 4 の倍数ならば $100=4\cdot25$ により，N は 4 の倍数となり，逆に N が 4 の倍数なら $a=N-100k$ も 4 の倍数となる。

● 8 の倍数の判定法

$1000=8\cdot125$ より，$1000a$ は 8 の倍数であるから，N が 8 の倍数になるのは $100b+10c+d$ すなわち下 3 桁が 8 の倍数のときである。

● 3 の倍数と 9 の倍数の判定法

倍数の判定法 (2)

3 の倍数 …… 各位の数の和が 3 の倍数　　9 の倍数 …… 各位の数の和が 9 の倍数

4 桁の自然数 N は，次のように変形できる。

$$\begin{aligned}N&=1000a+100b+10c+d\\&=(999+1)a+(99+1)b+(9+1)c+d\\&=9(111a+11b+c)+a+b+c+d\end{aligned}$$

$9=3\cdot3$ より，$9(111a+11b+c)$ は 3 の倍数であるから，

N が 3 の倍数になるのは各位の数の和 $a+b+c+d$ が 3 の倍数のときである。

9 の倍数の判定法も同じようにして説明できる。

数学と人間の活動【約数と倍数】 p.132〜135

青チャートA: 例題 110〜111

例） 一の位の数がわからない 4 桁の自然数 123□ が 5 の倍数であり，3 の倍数でもあるとき，一の位の数を求めよ。

解答 123□ が 5 の倍数であるのは，一の位の数が 0 または 5 のときである。

□は0〜9の数。先頭なら0は×

さらに，123□ が 3 の倍数であるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときである。

一の位の数が 0 のとき $1+2+3+\square=6+0=6$

一の位の数が 5 のとき $1+2+3+\square=6+5=11$

よって，一の位の数は　0

● **11 の倍数の判定法**

次の□に適当な数や語を入れ，11 の倍数の判定法を説明しよう。

4 桁の自然数 N は，次のように変形できる。

$$\begin{aligned} N&=1000a+100b+10c+d\\ &=(1100-100)a+(110-10)b+(11-1)c+d\\ &=11(100a+10b+c)-100a-10b-c+d \end{aligned}$$

この式の $-100a-10b-c+d$ の部分を更に変形する。

$$\begin{aligned} -100a-10b-c+d&=(-99-1)a+(-11+1)b-c+d\\ &=11(-9a-b)-a+b-c+d \end{aligned}$$

したがって，11 の倍数の判定法は次のようになる。

(偶数桁目の数の和) と (奇数桁目の数の和) の□が 11 の倍数

補足

$N=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+\cdots$ （a_0，a_1，a_2，…… は 0 以上 9 以下の整数）とすると

$N=(10^1+1)a_1+(10^2-1)a_2+(10^3+1)a_3+\cdots\cdots+(a_0+a_2+a_4+\cdots\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots)$

ここで n が奇数のとき

$10^n+1=(10+1)(10^{n-1}-10^{n-2}+\cdots-10+1)$

n が偶数のとき

$10^n-1=(10+1)(10^{n-1}-10^{n-2}+\cdots+10-1)$

これらはいずれも 11 の倍数であるから

$(a_0+a_2+a_4+\cdots\cdots)-(a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots)$

が 11 の倍数であれば，N は 11 の倍数である。