数学と人間の活動【素因数分解】 p.136～139

青チャートA: 例題 112～116

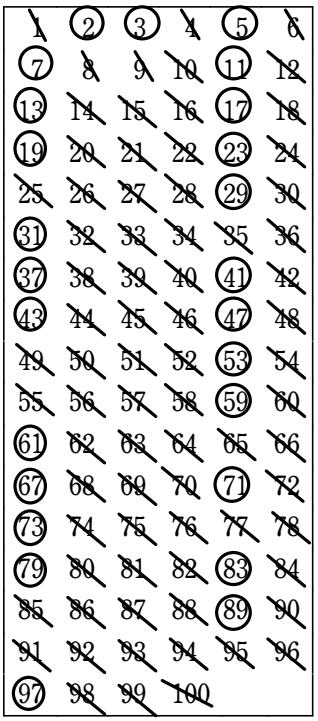
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】約数の個数と総和を出せるようにしよう。

□素数と素因数分解

紀元前 300 年頃の数学者ユークリッドが著した『原論』には，素数について既にさまざまなことが論じられていて，素数が無限に存在することの証明もそこには書かれている。素数には人を引き付ける不思議な魅力がある。

ここでは，素数と素因数分解について学ぼう。



○素数

5 の正の約数は 1 と 5 だけである。このように，2 以上の自然数で，

1 とそれ自身以外に正の約数をもたない自然数を　素数 という。

たとえば，20 以下の素数は　2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19　である。

また，2 以上の自然数で，素数でないものを　**合成数**　という。

なお，1 は素数でも合成数でもない。

練習6)古代ギリシャのエラトステネスが考案したとされる「エラトステネスのふるい」という方法を用いて，100 以下の素数を求めよ。

［1］ 1 は素数ではないから，斜線で消す。

［2］ 2 に○を付けて残す。2 以外の 2 の倍数を斜線で消す。

［3］ ○も斜線も付いていない最小の数 3 に○を付けて残す。3 以外の 3 の倍数を斜線で消す。

このような作業を続け，○を付けて残した数が素数である。

深める　上の数字の並びを見ると，素数が何度も現れる列とそうでない列がある。このことから素数についてどのようなことが成り立ちそうか予想しよう。

解答　2 行目以降は 1 列目と 5 列目に現れる。これは n を自然数として

$6n+1,\ 6n+2,\ \cdots\cdots 6n+6$ のいずれかで表される。これらは

$6n+2=2(3n+1),\ 6n+3=3(2n+1),\ 6n+4=2(3n+2),\ 6n+6=2\cdot 3(n+1)$

であるから，これらの数は合成数である。したがって，7 以上の素数を 6 で割ったときの余りは 1 または 5 と予想できる。

ふるい

○素因数分解

●素因数分解と暗号

$120=4\cdot 5\cdot 6$ のように，整数がいくつかの整数の積で表されるとき，積を作る 1 つ 1 つの整数を，もとの整数の　**因 数**　という。素数である因数を　**素因数**　といい，自然数を素数だけの積の形に表すことを　**素因数分解**　するという。

合成数は，必ず素因数分解できる。また，1 つの合成数の素因数分解は，積の順序の違いを除けばただ 1 通りである。このことを**素因数分解の一意性**という。

例2） 504 の素因数分解

右のように，504 を素数で次々に割っていく。

この計算結果から，次の素因数分解が得られる。

$$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$$　終

$$\begin{array}{r|l} 2 & 504 \\ 2 & 252 \\ 2 & 126 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

大きい素数から行ってもよい。
素数の平方数を用いるのも一つの手段。

数学と人間の活動【素因数分解】 p.136～139

青チャートA: 例題 112～116

練習） $\sqrt{168n}$ が自然数になるような最小の自然数 n を求めよ。【青チャート数学A基本例題１１２類題】

解答　$\sqrt{168n}$ が自然数になるには，

$168n$ がある自然数の 2 乗になればよい。

168 を素因数分解すると　$168=2^3\cdot3\cdot7$

素因数が偶数個ずつになればよい。

168 に $2\cdot3\cdot7$ を掛けると，$2^4\cdot3^2\cdot7^2$ すなわち $(2^2\cdot3\cdot7)^2$ になる。

補足　$2^4\cdot3^2\cdot7^2=(2\cdot2\cdot2\cdot2)\cdot(3\cdot3)\cdot(7\cdot7)$
$=(2\cdot2\cdot3\cdot7)\cdot(2\cdot2\cdot3\cdot7)=(2\cdot2\cdot3\cdot7)^2$ である。

よって，求める自然数 n は　$n=2\cdot3\cdot7=42$

自然数になる（ルートがはずれる）
$\Rightarrow\sqrt{\bigcirc}=\sqrt{\square^2}$ となれば良い

$$\begin{array}{r|l} 2 & 168 \\ 2 & 84 \\ 2 & 42 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

111468433 は 2 つの素数の積で表されるが，それをすぐにいえる人は少ないだろう。答えは 2 つの素数 9941, 11213 である。逆に，2 つの素数 9941, 11213 の積を計算して 111468433 を得ることは難しくない。

インターネットなどで情報を安全に扱うには暗号技術が欠かせない。その暗号の 1 つに RSA 暗号というものがある。RSA 暗号では，巨大な合成数を素数の積に分解することが暗号を解く鍵になっている公開鍵暗号であり，その難しさが安全性につながっている。しかし，量子コンピュータと呼ばれるコンピュータが実現すると，RSA 暗号が破られるといわれている。

1977年に発表され，発明した3名（Ronald Rivest，Adi Shamir，Leonard Adleman）の頭文字から RSA 暗号と呼ばれている。暗号技術はインターネットなど情報通信をする際になくてはならないものである。

● 素因数分解と約数

数学A（場合の数）のおさらい

素因数分解を利用して，自然数の正の約数について調べよう。

例 3） 200 の正の約数をすべて求める。

200 を素因数分解すると　$200=2^3\cdot5^2$

よって，200 の正の約数は，素因数 2 を 3 個以下，素因数 5 を 2 個以下もつ数で，次のようになる。

【注意】一般に，自然数 n に対して，$n^0=1$ と定める。

$2^0\cdot5^0=1$，$2^0\cdot5^1=5$，$2^0\cdot5^2=25$，$2^1\cdot5^0=2$，$2^1\cdot5^1=10$，$2^1\cdot5^2=50$，
$2^2\cdot5^0=4$，$2^2\cdot5^1=20$，$2^2\cdot5^2=100$，$2^3\cdot5^0=8$，$2^3\cdot5^1=40$，$2^3\cdot5^2=200$

ただし，$2^0=1$，$5^0=1$ と考える。　終

200 の正の約数は，x，y を整数として，次のように表される。

$2^x\cdot5^y$　ただし，$0\leqq x\leqq3$，$0\leqq y\leqq2$

自然数の素因数分解がわかれば，その正の約数がすべて求められる。

上の 200 の正の約数を表す式 $2^x\cdot5^y$ において，整数 x のとる値は $(3+1)$ 個あり，その値のそれぞれについて整数 y のとる値が $(2+1)$ 個ある。

したがって，200 の正の約数の個数は，次のように求められる。

$(3+1)(2+1)=12$

数学と人間の活動【素因数分解】 p.136～139

青チャートA: 例題 112～116

一般に，自然数の正の約数の個数について，次のことが成り立つ。

$(2^3+2^2+2^1+2^0)(5^2+5^1+5^0)$ を展開したときの項と一致する

⇒ 正の約数の個数は展開したときにできる項数と一致するので，場合の数（道順；積の法則）で求めることができる。

自然数 N の素因数分解が $N=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdots\cdots$ となるとき，

N の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$ である。

（指数＋１）の積

例4） 504 の正の約数の個数

504 を素因数分解すると　$504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$

よって，504 の正の約数の個数は

$(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$　すなわち 24 個　　終

補足 正の約数の総和はカッコの中を先に計算すれば良い。

例 $(2^3+2^2+2^1+2^0)(5^2+5^1+5^0)=(8+4+2+1)(25+5+1)=465$

練習10) 15 枚のカードを並べ，表に 1 から 15 までの整数を 1 個ずつ順に書く。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

まず，左から順にすべてのカードをひっくり返す。

■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

1 を約数にもつものがひっくり返る

次に，左から 2 番目ごとにカードをひっくり返す。

■	2	■	4	■	6	■	8	■	10	■	12	■	14	■

2 を約数にもつものがひっくり返る

左から 3 番目ごと，4 番目ごと，……，15 番目ごとまで同じことを行うと，カードは次のようになる。

■	2	3	■	5	6	7	8	■	10	11	12	13	14	15

カードめくり

裏向きのカードに書かれた数は 1, 4, 9 すなわち 1^2, 2^2, 3^2である。

(1) 裏向きのカードがひっくり返された回数は，偶数か，奇数か。

解答 もともと表だったカードが裏になるのは，奇数回ひっくり返されたときである。
よって，裏向きのカードがひっくり返された回数は奇数である。

(2) 裏向きのカードに書かれた数の正の約数の個数は，偶数か，奇数か。

解答 自然数 k に対して，k の倍数番目のカードをひっくり返すとき，n と書かれたカードがひっくり返されるとする。 n は k の倍数であるから，k は n の約数である。
よって，カードがひっくり返された回数は，カードに書かれた数の正の約数の個数と等しい。
したがって，(1) から，裏向きのカードに書かれた数の正の約数の個数は奇数である。

(3) 裏向きのカードに書かれた数が n^2（n は自然数）の形をした数だけである理由を説明せよ。

解答 裏向きのカードに書かれた数が
$2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e\cdot 13^f$（$a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$ は 0 以上の整数）
であるとき，この数の正の約数の個数は　$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)$
である。これが奇数となるから，$a+1$, $b+1$, $c+1$, $d+1$, $e+1$, $f+1$ はすべて奇数，
すなわち，a, b, c, d, e, f はすべて偶数である。
したがって，裏向きのカードに書かれた数は n^2（n は自然数）の形をした数である。

指数が偶数
⇒2 でくくれる

数学と人間の活動【素因数分解】 p.136～139

青チャートA: 例題 112～116

例題） $N=50!$ について，次の問いに答えよ。

(1) N を素因数分解したとき，素因数 5 の個数を求めよ。

(2) N を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

【慶應義塾大：青チャート数学A基本例題１１６類題】

解答

(1) 1 から 50 までの自然数のうち，

5 の倍数は 10 個あり，

5^2 $(=25)$ の倍数は 2 個ある。

	5	10	15	30	25	30	35	40	45	50	個数
5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	10
5^2					○					○	2
5^3											0

$5^3=125>50$ であるから，5^3，5^4，5^5，…… の倍数はない。

5^2 の倍数は素因数 5 を 2 個もつが，

5 の倍数として 1 個，

5^2 の倍数として 1 個もつと数えればよい。

よって，素因数 5 の個数は　$10+2=12$ (個)

(2) $10=2\cdot5$ であり，N の素因数 2 の個数は素因数 5 の個数より多い。

よって，N の因数 10 の個数は素因数 5 の個数に等しく　12 個

したがって，N を計算すると，末尾には 0 が連続して 12 個並ぶ。

$2\times5=10$ と計算できる回数（個数）を考える