数学と人間の活動【最大公約数・最小公倍数】 p.140～143

青チャートA: 例題 117～121

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】性質を用いて、条件を満たす自然数の組を求めよう

□**最大公約数**（greatest common divisor，G.C.D. や G.C.M.） g で表されることが多い

最小公倍数（least common multiple，L.C.M.） l で表されることが多い

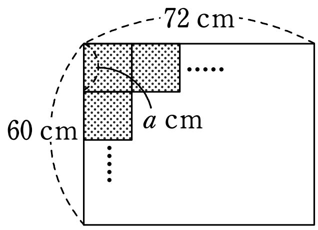
2 つ以上の整数について，共通する約数をそれらの **公約数** といい，公約数のうち最大のものを **最大公約数** という。また，2 つ以上の整数について，共通する倍数をそれらの **公倍数** といい，正の公倍数のうち最小のものを**最小公倍数** という。2 つの整数の公約数，公倍数について考えよう。

一般に，次のことがいえる。

公約数は最大公約数の約数，公倍数は最小公倍数の倍数である。

□最大公約数

問題 縦 60 cm，横 72 cm の長方形の枠に，1 辺の長さ a cm の正方形のタイルをすき間なく敷き詰めたい。タイルをできるだけ大きくするには a の値をいくらにすればよいか。
ただし，a は整数とする。



練習１１） 上の問題について，次の問いに答えよ。

(1) 60 を等分できる正の整数をすべて求めよ。

解答 60 を等分できる正の整数は，60 の正の約数であるから
1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60

(2) 72 を等分できる正の整数をすべて求めよ。

解答 72 を等分できる正の整数は，72 の正の約数であるから
1，2，3，4，6，8，9，12，18，24，36，72

(3) 上の問題の答え a の値を求めよ。

解答 a の値は，(1) と(2) に共通する最大の整数であるから　12

練習１１ では 60 と 72 の最大公約数を求めていることに気づいただろうか。

最大公約数を求める方法について，紀元前 300 年頃の数学者ユークリッドの『原論』には **互除法** という優れた方法が述べられている。互除法については後の項目で取り扱うが，ここでは素因数分解を利用して最大公約数を求めてみよう。

エウクレイデス（英：Euclid ユークリッド）
紀元前３世紀頃の数学者
原論の著者であり，「幾何学の父」と称される。
『幾何学に王道なし』

数学と人間の活動【最大公約数・最小公倍数】 p.140〜143

青チャートA: 例題117〜121

□最小公倍数

「干支(えと)」を知っているだろう。12 年周期で繰り返す「十二支(じゅうにし)」

子 丑 寅 卯 辰 巳 午 未 申 酉 戌 亥

に，10 年周期で繰り返す「十干(じっかん)」

甲(きのえ) 乙(きのと) 丙(ひのえ) 丁(ひのと) 戊(つちのえ) 己(つちのと) 庚(かのえ) 辛(かのと) 壬(みずのえ) 癸(みずのと)

を組み合わせたものを干支や六十干支，十干十二支などという。

過去には時刻や方角などにも用いられていた（正午や午前午後，丑三つ時などが名残）。また，「甲・乙・丙・丁」は危険物取扱者の分類などに用いられていたり、地名や歴史などにも名残が見られたりすることもある。

木・火・土・金・水の兄(え)（陽）と弟(と)（陰）

例えば，オリンピック・パラリンピックが東京で初めて行われた 1964 年の干支は「甲辰」で，そこから 24 年間の干支は次の表の通りである。

1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
甲辰	乙巳	丙午	丁未	戊申	己酉	庚戌	辛亥	壬子	癸丑	甲寅	乙卯
1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
丙辰	丁巳	戊午	己未	庚申	辛酉	壬戌	癸亥	甲子	乙丑	丙寅	丁卯

次の問題について，考えてみよう。

問題　ある年の干支が「甲辰」であるとする。次に干支が甲辰になるのは何年後か。

何年後に十干が甲になるかを書き出すと，　10 20 30 40 50 60 70 …

何年後に十二支が辰になるかを書き出すと，　12 24 36 48 60 72 …

よって，上の問題の答えは 60 年後である。（ 1964 年の 60 年後は 2024 年 ）

上の問題では 10 と 12 の最小公倍数を求めたことに気づいただろうか。周期が整数になっているものをいくつか考える場面では，公倍数の考えが活用できる。（例　素数ゼミなど）

素因数分解を利用して，最大公約数・最小公倍数を求めてみよう。

例５・６） 72 と 240 の最大公約数と最小公倍数

72，240 をそれぞれ素因数分解すると

$$72=2^3\cdot 3^2$$

$$240=2^4\cdot 3\cdot 5$$

72 と 240 の正の公約数は，72 と 240 が共通にもつ素因数の積である。

すなわち，素因数 2 を 3 個以下，素因数 3 を 1 個以下もつ数で，a，b を整数として，$2^a\cdot 3^b$ と表される。ただし，$0\leqq a\leqq 3$，$0\leqq b\leqq 1$

最大公約数は，公約数のうち最大のものであるから　$2^3\cdot 3^1=24$　終

72 と 240 の公倍数は，この 2 数の素因数のすべてを因数とするから

$$2^4\cdot 3^2\cdot 5$$

の倍数である。

最小公倍数は，これらのうちで正で最小のものであるから

$$2^4\cdot 3^2\cdot 5=720$$　終

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$
$$240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

$\boxed{\text{最大公約数}}$ は $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 8 \cdot 3 \cdot 1 = 24$

$\boxed{\text{最小公倍数}}$ は $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720$

最大公約数は
指数の**小さい方**を選ぶ

最小公倍数は
指数の**大きい方**を選ぶ

3 つ以上でも，2 つの整数の場合と同じようにして求めることができる。

例） 28，84，180 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

28，84，180 を素因数分解すると

$$28 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$
$$84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$$

$$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$
$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

最大公約数は $2^2 = 4$，

最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$

別解

2)	28	84	180
2)	14	42	90
3)	7	21	45
7)	7	7	15
	1	1	15

すべての数を割ったものだけ掛けると最大公約数

部分的に割ることができた数も含めて掛けると最小公倍数

例） n は正の整数とする。n と 18 の最小公倍数が 180 であるような n をすべて求めよ。

解答 18，180 を素因数分解すると $18 = 2 \cdot 3^2$， $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$18 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0$$
$$n = 2^{\bigcirc} \cdot 3^{\triangle} \cdot 5^{\square}$$
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

最小公倍数は
指数の**大きい方**を取る

よって ○＝2，□＝1が確定する

△は 2 以下の正の整数の可能性がある

よって，18 との最小公倍数が 180 である正の整数は

$$2^2 \cdot 3^a \cdot 5^1 \quad (a = 0,\ 1,\ 2)$$

と表される。

したがって，求める整数 n は

a に0，1，2 を代入して

$$n = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

計算して $n = 20,\ 60,\ 180$

□互いに素

a，b 両方を割ることができる数（共通な素因数）が 1 以外ない状態。aや b は素数でなくてもよい

2 つの整数 a，b の最大公約数が 1 であるとき，a，b は **互いに素** であるという。

たとえば，$15 = 3 \cdot 5$，$28 = 2^2 \cdot 7$ より，15 と 28 の最大公約数は 1 である。よって，15 と 28 は互いに素であるという。 一般に，次のことが成り立つ。

> a，b，c は整数で，a，b は互いに素であるとする。
>
> 1 ac が b の倍数であるとき，c は b の倍数である。
>
> 2 a の倍数であり，b の倍数でもある整数は，ab の倍数である。

「互いに素」なら…

$$a \times c = b \times n$$

倍数関係のペアが決まる

数学と人間の活動【最大公約数・最小公倍数】 p.140～143

青チャートA: 例題117～121

□最大公約数，最小公倍数の性質

24，180 の最大公約数は 12 であり　$24=12\cdot 2$，　$180=12\cdot 15$

と表される。このとき，それぞれの右辺の因数 2 と 15 は互いに素である。

また，24，180 の最小公倍数は 360 で，$360=12\cdot 2\cdot 15$ である。

2 つの自然数の最大公約数，最小公倍数について，次のことがいえる。

2 つの自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とする。

$a=ga'$，$b=gb'$ であるとすると，次のことが成り立つ。

1　a'，b' は互いに素である。

2　$l=ga'b'$

3　$ab=gl$

$ab=ga'\cdot gb'=g\cdot ga'b'$

例題） 最大公約数が 15，最小公倍数が 180 である 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。

ただし，$a<b$ とする。【青チャート数学A練習１１８類題】

解答　最大公約数が 15 であるから，a，b は　$a=15a'$，$b=15b'$

1　a'，b'　は互いに素である。

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

このとき，a，b の最小公倍数は $15a'b'$ と表されるから

$15a'b'=180$　　　すなわち　$a'b'=12$

2　$l=ga'b'$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である a'，b' の組は掛けて 12 になる数である。

互いに素でない

$a'<b'$ を満たしていない

15 倍

a'	1	$\cancel{2}$	3	$\cancel{4}$	$\cancel{6}$	$\cancel{12}$
b'	12	$\cancel{6}$	4	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{1}$
$a=15a'$	15		45			
$b=15b'$	180		60			

よって　$(a,\ b)=(15,\ 180),\ (45,\ 60)$

数学と人間の活動【最大公約数・最小公倍数】 p.140〜143

青チャートA: 例題 117〜121

例題） 次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

【青チャート数学A基本例題１１８類題】

(1) 和が 160，最大公約数が 8

$\boxed{\text{解答}}$ 最大公約数が 8 であるから，a，b は

$a=8a'$，$b=8b'$

1 a'，b' は互いに素である。

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$8a'+8b'=160$ すなわち $a'+b'=20$

$a'+b'=20$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

互いに素でない

$a'<b'$ を満たしていない

8 倍

a'	1	~~2~~	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	~~…~~	~~19~~
b'	19	~~18~~	17	~~16~~	~~15~~	~~14~~	13	~~12~~	11	~~10~~	~~…~~	~~1~~
$a=8a'$	8		24				56		72			
$b=8b'$	152		136				104		88			

よって $(a,\ b)=(8,\ 152)$，$(24,\ 136)$，$(56,\ 104)$，$(72,\ 88)$

(2) 積が 300，最小公倍数が 60

$\boxed{\text{解答}}$ 最大公約数を g とすると，a，b は

$a=ga'$，$b=gb'$

1 a'，b' は互いに素である。

と表される。ただし，a'，b' は互いに素である自然数で，$a'<b'$ である。

a，b の積と最大公約数，最小公倍数の積は等しいから

3 $ab=gl$

$300=g\cdot 60$ よって $g=5$

最小公倍数が 60 であるから

$ga'b'=60$ すなわち $5a'b'=60$

2 $l=ga'b'$

よって $a'b'=12$

$a'b'=12$，$a'<b'$ を満たし，互いに素である自然数 a'，b' の組は

互いに素でない

$a'<b'$ を満たしていない

5 倍

a'	1	~~2~~	3	~~4~~	~~6~~	~~12~~
b'	12	~~6~~	4	~~3~~	~~2~~	~~1~~
$a=5a'$	5		15			
$b=5b'$	60		20			

したがって $(a,\ b)=(5,\ 60)$，$(15,\ 20)$