

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】性質を用いて、条件を満たす自然数の組を求めよう

□ 整数の割り算

次の問題について、考えてみよう。

問題 私の年齢を 3 で割った余りは 2, 5 で割った余りは 3, 7 で割った余りは 4 である。私の年齢は何歳か。ただし, 105 歳より下である。

練習 1 6)

104 以下の自然数について, 次の問いに答えよ。

(1) 7 で割った余りが 4 になる自然数を, 次のように書き出せ。

(2) (1) の自然数を 5 で割ったときの余りをその数の下に書け。

(3) (2) で余りが 3 になった自然数について, 3 で割った余りを更にその下に書き, 余りが 2 になる自然数を見つけよ。

	4	11	18	25	32	39	46	53
5 で割った余り	4	1	3	0	2	4	1	3
3 で割った余り			0					2

	60	67	74	81	88	95	102
5 で割った余り	0	2	4	1	3	0	2
3 で割った余り					1		

したがって, (3) について求める数は 53

練習 1 6 から, 上の問題の私の年齢がわかる。また, 次のような計算

方法もある。3, 5, 7 で割った余りがそれぞれ a, b, c であるとき,

$$70a + 21b + 15c \dots\dots ①$$

を計算する。そして, ① から 3, 5, 7 の最小公倍数である 105 を引いて残りを求める。残りが 105 以上であればまた 105 を引くことを繰り返す。最後の残りが答えである。いい換えると, ① を 105 で割った余りが答えである。

$$70a + 21b + 15c = 70 \cdot 2 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 263$$

$$263 - 105 = 158, 158 - 105 = 53$$

この結果から, 私の年齢は 53 歳であるとわかる。

	15 × ○	21 × △	70 × □
÷ 7	○あまり	あまりなし	あまりなし
÷ 5	あまりなし	△あまり	あまりなし
÷ 3	あまりなし	あまりなし	□あまり

求める最小の答えは

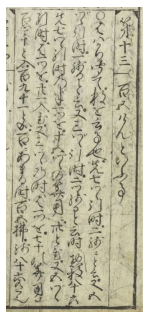
$$15 \times \bigcirc + 21 \times \triangle + 70 \times \square - 105 \cdot n$$

によって求められる

263 を 105 で割ると余りは 53

この方法は百五減算と呼ばれるもので, 江戸時代の数学書『塵劫記』に同様な問題と解答が記されている。

3 で割った余りは 0 ~ 2 (3 通り)
 5 で割った余りは 0 ~ 4 (5 通り)
 7 で割った余りは 0 ~ 6 (7 通り)
 なので組合せは 105 通り



第十三 百五げんといふ事

○半(は)ばかりをきゝてかづを云事なり。先(まづ)七づ引(ひく)時、二つ残ると云。又五つひく時、一つ残ると云。又三づ引時、二つ残ると云時に、此半(は)ばかりを聞(き)ぎて惣数を知る。惣数八十六あるといふなり。

先(まづ)七づ引時の半一つを、十五づのさん用に入れ、三十とおき、又五づ引時の半一つを、二十一と入て置(おく)。又三づの時の半(は)を、一つを七づのさん用にして百四十と入て、三口合(あわせて)百九十一有時、百にあまる時には百五はらい、のこり八十六あるといふなり。

国立国会図書館デジタルコレクション

<https://dl.ndl.go.jp/pid/3511858/1/70>

□ 整数の割り算と商・余り

自然数を自然数で割る割り算を行うと、商と余りが求められる。

例えば、20 を 3 で割ると、商は 6 で余りは 2 である。この関係を式で書くと、次のようになる。

$$20 = 3 \cdot 6 + 2$$

\uparrow \uparrow
 商 余り

$$\text{(割られる数)} = \text{(割る数)} \times \text{(商)} + \text{(余り)}$$

$$\begin{array}{r} 6 \leftarrow \text{商} \\ 3 \overline{) 20} \\ \underline{18} \\ 2 \leftarrow \text{余り} \end{array}$$

ここで、商 6 は、余りが割る数 3 よりも小さくなるように求めている。このようにして求めた商と余りはただ 1 通りである。

整数を正の整数で割る割り算も、自然数の割り算と同様に考えられ、上と同様の等式がただ 1 通りに定まる。

整数の割り算

整数 a と正の整数 b について
 を満たす整数 q, r は 1 通りに定まる。

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

余りは割る数より
 小さくなる

$r = 0$ のとき a は b で割り切れる

$r \neq 0$ のとき a は b で割り切れないという

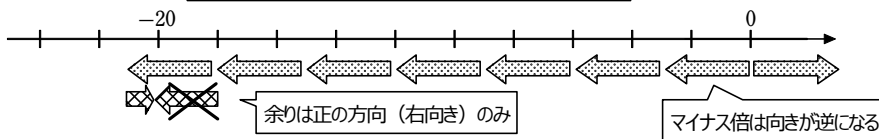
注意 q を、 a を b で割ったときの商、 r を余りという。

例 7) (1) $43 = 5 \cdot 8 + 3$ であるから 43 を 5 で割ったときの商は 8, 余りは 3

(2) $-20 = 3 \cdot (-7) + 1$ であるから -20 を 3 で割ったときの商は -7, 余りは 1 (終)

余りは 0 以上で、割る数 3 より小さいものになる

$$-20 = 3 \cdot (-6) + (-2) \text{ はダメ}$$



例題 5) a, b は整数とする。 a を 5 で割ると 2 余り, b を 5 で割ると 4 余る。

次の数を 5 で割ったときの余りを求めよ。

- (1) $a + b$ (2) $a - b$ (3) ab

$$\begin{aligned} \text{(割られる数)} &= \text{(割る数)} \times \text{(商)} + \text{(余り)} \\ a &= b \times q + r \end{aligned}$$

解答 a, b は、整数 k, l を用いて $a = 5k + 2, b = 5l + 4$ と表される。

(1) $a + b = (5k + 2) + (5l + 4)$

$$= 5(k + l) + 2 + 4$$

$$= 5(k + l + 1) + 1$$

よって、 $a + b$ を 5 で割ったときの余りは 1 である。

(2) $a - b = (5k + 2) - (5l + 4)$

$$= 5(k - l) + 2 - 4$$

$$= 5(k - l - 1) + 3$$

よって、 $a - b$ を 5 で割ったときの余りは 3 である。

(3) $ab = (5k + 2)(5l + 4)$

$$= 5^2kl + 5k \cdot 4 + 2 \cdot 5l + 2 \cdot 4$$

$$= 5(5kl + 4k + 2l + 1) + 3$$

よって、 ab を 5 で割ったときの余りは 3 である。

例題 1 において, それぞれの余りに着目すると

$$\begin{aligned} (1) \quad a + b &= (5k + 2) + (5l + 4) = 5(k + l) + \underbrace{(2 + 4)}_4 \\ (2) \quad a - b &= (5k + 2) - (5l + 4) = 5(k - l) + \underbrace{(2 - 4)}_{-2} \\ (3) \quad ab &= (5k + 2)(5l + 4) = 5(5kl + 4k + 2l) + \underbrace{2 \cdot 4}_8 \end{aligned}$$

である。2 は a を 5 で割ったときの余りであり, 4 は b を 5 で割ったときの余りである。よって例題 1 のそれぞれの余りに着目すると, 次のようになっている。

$$\begin{aligned} (a + b \text{ を } 5 \text{ で割った余り}) &= \overset{\text{等しい}}{\text{余りの和 } 2 + 4 \text{ を } 5 \text{ で割った余り}} \\ (a - b \text{ を } 5 \text{ で割った余り}) &= (\text{余りの差 } 2 - 4 \text{ を } 5 \text{ で割った余り}) \\ (ab \text{ を } 5 \text{ で割った余り}) &= (\text{余りの積 } 2 \cdot 4 \text{ を } 5 \text{ で割った余り}) \end{aligned}$$

余りだけに注目しても、
同じ結果が求められる

○年齢を百五減算で求める話を思いだそう。

答えの年齢を x 歳とする。 x を 3, 5, 7 で割った余りがそれぞれ a, b, c であるとき,

$$70a + 21b + 15c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を計算し, ① を 105 で割った余りが x に等しいということであった。

練習 19) a, b, c は $0 \leq a < 3, 0 \leq b < 5, 0 \leq c < 7$ である整数とする。

$70a + 21b + 15c$ を 3, 5, 7 で割った余りはそれぞれ a, b, c であることを示せ。

解答 $N = 70a + 21b + 15c$ とする。

$$N = 3(23a + 7b + 5c) + a$$

$0 \leq a < 3$ であるから, N を 3 で割った余りは a である。

$$N = 5(14a + 4b + 3c) + b$$

$0 \leq b < 5$ であるから, N を 5 で割った余りは b である。

$$N = 7(10a + 3b + 2c) + c$$

$0 \leq c < 7$ であるから, N を 7 で割った余りは c である。

百五減算の方法では, 3, 5, 7 で割った余りがそれぞれ a, b, c であるとき,

$$70a + 21b + 15c$$

の値を使って考察した。このときの係数 70, 21, 15 はどのように定められているのだろうか。

次の□に適する数を入れて考えよう。

70 は 5 と 7 の公倍数で, □ **3** □ で割ったときの余りが □ **1** □

21 は 7 と 3 の公倍数で, □ **5** □ で割ったときの余りが □ **1** □

15 は 3 と 5 の公倍数で, □ **7** □ で割ったときの余りが □ **1** □

である。

余りは **1** に統一

このことから, 百五減算と同様の考え方で, 次の問題を解いてみよう。

参考 後ほど紹介する合同式を用いて示すと

$$70 \equiv 0 \pmod{(5 \times 7)}, 70 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$21 \equiv 0 \pmod{(3 \times 7)}, 21 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$15 \equiv 0 \pmod{(3 \times 5)}, 15 \equiv 1 \pmod{7}$$

より一般解は

$$x \equiv 70a + 21b + 15c \pmod{105} \text{ や}$$

$$x \equiv -35a + 21b + 15c \pmod{105}$$

とかける

□ 余りによる整数の分類

余りは割る数より小さいので…

整数を 2 で割ったときの余りは, 0, 1 のいずれか

⇒ すべての整数は整数 k を用いて $2k, 2k+1$ のいずれか

整数を 3 で割ったときの余りは, 0, 1, 2 のいずれか

⇒ すべての整数は整数 k を用いて $3k, 3k+1, 3k+2$ のいずれかの形に表される。

注意 $2k$ で表される数は偶数

$2k+1$ で表される数は奇数

注意 0 は 2×0 なので偶数である。

つまり整数を正の整数 m で割ったときの余りに着目すると, すべての整数は, 整数 k を用いて次の

いずれかの形に表される。 $mk, mk+1, \dots, mk+(m-1)$

余り 0

余り 1

余り $m-1$

余りは割る数より小さいので
0 から $m-1$ のいずれか

また, 連続する 2 つの整数には, 2 の倍数が含まれる。

また, 連続する 3 つの整数には, 2 の倍数と 3 の倍数が含まれる。

よって, 連続する整数の積について, 次のことが成り立つ。

連続する 2 つの整数の積は 2 の倍数である。

連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数である。

連続する 2 つの整数は

$2k \times (2k+1)$ なので 2 の倍数,

連続する 3 つの整数はさらに

$3k \times (3k+1) \times (3k+2)$ より

3 の倍数でもある。

よって 6 の倍数といえる

例題) 次のことを証明せよ。【青チャート数学A基本例題 1 2 6 類題】

連続する 2 つの偶数の 2 乗の和から 4 を引いた数は, 16 の倍数である。

証明) 連続する 2 つの偶数は, 整数 k を用いて $2k, 2k+2$ と表される。

$2(k+1)$ でも OK

$$(2k)^2 + (2k+2)^2 - 4 = 4k^2 + 4k^2 + 8k + 4 - 4 = 8k(k+1)$$

連続する 2 つの整数 $k, k+1$ のいずれかは 2 の倍数であるから, その積 $k(k+1)$ は 2 の倍数。

よって, $8k(k+1)$ は $8 \times (2 \text{ の倍数})$ となるので 16 の倍数である。

$k(k+1) = 2m$ とすると

$$8k(k+1) = 8 \cdot 2m = 16m$$

したがって, 連続する 2 つの偶数の和から 4 を引いた数は,

16 の倍数である。 終

例題) n は整数とする。『 n^2 が 4 で割り切れないとき, その余りは 1 である。』を証明せよ。

【青チャート数学A基本例題 1 2 5 類題】

方針) 4 で割る ⇒ 余りは 0, 1, 2, 3 のいずれかなので…

証明) すべての整数は, 整数 k を用いて, $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$

のいずれかの形に表される。

[1] $n = 4k$ のとき $n^2 = (4k)^2 = 4 \cdot 4k^2$

余り 0 ⇒ 割り切れるので関係ない

確かに割り切れない

[2] $n = 4k+1$ のとき $n^2 = (4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$

とき余り 1 になる

[3] $n = 4k+2$ のとき $n^2 = (4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1)$

余り 0 ⇒ 割り切れる

ので関係ない

[4] $n = 4k+3$ のとき $n^2 = (4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9$

$$= 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1$$

確かに割り切れない

とき余り 1 になる

n^2 が 4 で割り切れないのは [2], [4] のときで, そのときの余りは 1 である。

よって, n^2 が 4 で割り切れないとき, その余りは 1 である。