数学と人間の活動【互除法】 p.146～147，177

青チャートA: 例題 133～134

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】性質を用いて、条件を満たす自然数の組を求めよう

□ユークリッドの互除法

素因数分解を用いて，2 つの数の最大公約数を求める方法を学んだが，素因数分解が簡単にできない場合に最大公約数を求めるにはどうすればよいだろうか。ここでは，ユークリッドの互除法という方法について学ぼう。更に，同じ考え方を，$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明に利用してみよう。

○ユークリッドの互除法

次の問題について，考えてみよう。

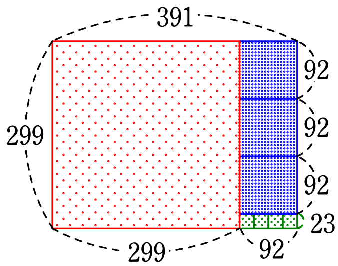
> 問題　2 辺の長さが 391 cm，299 cm の長方形の枠に，1 辺の長さ a cm の正方形のタイルをすき間なく敷き詰めたい。タイルをできるだけ大きくするには a の値をいくらにすればよいか。ただし，a は整数とする。

求める a の値は 391，299 の最大公約数である。ここでは，この問題を次の方法で考えてみよう。

① 2 辺の長さが 391，299 の長方形には，1 辺の長さ 299 の正方形を 1 個敷き詰めることができる。2 辺の長さが 299，92 の長方形が残る。

② ① で残った長方形には，1 辺の長さ 92 の正方形を 3 個敷き詰めることができる。2 辺の長さが 92，23 の長方形が残る。

③ ② で残った長方形には，1 辺の長さ 23 の正方形を 4 個敷き詰めることができる。これで，最初の長方形がすき間なく敷き詰められた。



上の操作は次のように表すことができる。

391 と 299 の最大公約数を，この 2 つの数の割り算を用いて考える。

391 を 299 で割ると，商は 1，余りは 92 であるから　$391=299\cdot1+92$　…… ①

等式 ① より，次の等式も成り立つ　$92=391-299\cdot1$　…… ②

等式 ② より，391 と 299 の公約数は 92 の約数でもあるから

391 と 299 の公約数は，299 と 92 の公約数である。

299 を 92 で割ると，商は 3，余りは 23 であるから　$299=92\cdot3+23$　…… ③

等式 ③ より，次の等式も成り立つ　$23=299-92\cdot3$　…… ④

等式 ④ より，299 と 92 の公約数は 23 の約数でもあるから

299 と 92 の公約数は，92 と 23 の公約数である。

92 を 23 で割ると，商は 4，余りは 0 であるから　$92=23\cdot4+0$　…… ⑤

等式 ⑤ より，92 と 23 の最大公約数は 23 である。

よって，391 と 299 の公約数 と 92 と 23 の公約数が一致するから，それぞれの最大公約数も等しい。

補足(391，299 の最大公約数であることの確認)

$391\div23=17$　よって，391 を素因数分解すると　$391=17\cdot23$

$299\div23=13$　よって，299 を素因数分解すると　$299=13\cdot23$

したがって，391 と 299 の最大公約数は，23 である。

数学と人間の活動【互除法】 p.146～147，177

青チャートA：例題 133～134

2 つの自然数の最大公約数について，次のことが成り立つ。このことを繰り返し用いると，2 つの整数の最大公約数を求めることができる。

> 自然数 a，b について，a を b で割ったときの余りを r とすると，
> a と b の最大公約数は，
> b と r の最大公約数に等しい。(*)
>
> a，b の最大公約数
> $a = bq + r$ 等しい
> b，r の最大公約数

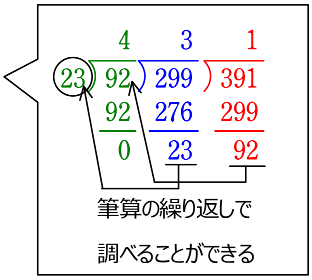
例８） 391 と 299 の最大公約数を求める。

割る数を余りで割っていく

① $391 = 299 \cdot 1 + 92$　　① (391 と 299 の最大公約数)
　　　　　　　　　　　　　　＝(299 と 92 の最大公約数)

② $299 = 92 \cdot 3 + 23$　　② (299 と 92 の最大公約数)
　　　　　　　　　　　　　　＝(92 と 23 の最大公約数)

③ $92 = 23 \cdot 4 + 0$　　③ (92 と 23 の最大公約数)＝23



よって，391 と 299 の最大公約数は 23　　終

英語では Euclidean algorithm (ユークリッドの算法)

上のような最大公約数の求め方を **ユークリッドの互除法** または単に **互除法** という。　互いに除法をしていく

互除法では，余りが次の割り算の割る数になるから，次の余りはその前の余りより小さくなる。したがって，余りは割り算の繰り返しのたびに小さくなる。しかも，余りは負でない整数であるから，余りは何回かの割り算ののち必ず 0 になる。余りが 0 になったときの割る数が，求める最大公約数である。

補足　互除法の原理の証明

(*) は，次のように証明することができる。

2 つの自然数 a，b について，a を b で割ったときの余りを r とすると「a，b の最大公約数 ＝ b，r の最大公約数」が成り立つ

証明　a を b で割ったときの商を q とすると，次の等式が成り立つ。

$$a = bq + r \quad \cdots\cdots ①$$

移項すると　　$r = a - bq \quad \cdots\cdots ②$

a と b の最大公約数を m，b と r の最大公約数を n とする。

m は a と b の公約数であるから，② により，m は r の約数である。

よって，m は b と r の公約数である。

b と r の最大公約数は n であるから　　$m \leqq n \quad \cdots\cdots ③$

一方，n は b と r の公約数であるから，① により，n は a の約数である。

よって，n は b と a の公約数である。

a と b の最大公約数は m であるから　　$n \leqq m \quad \cdots\cdots ④$

③，④ により　　$m = n$　　終

数学と人間の活動【互除法】 p.146～147，177

青チャートA：例題 133～134

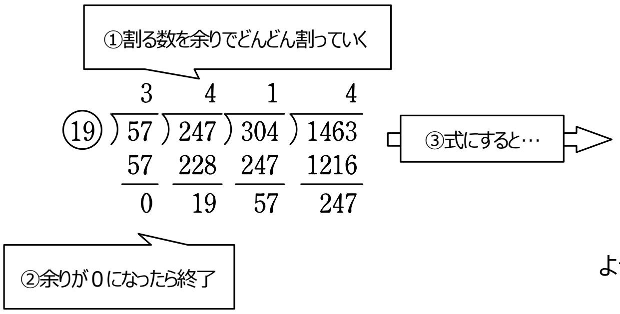
割り算の等式 $a=bq+r$ について，$r<b$ であるから，割り算を繰り返すと，出てくる余りは小さくなっていく。さらに，余りは 0 以上であることから，割り算を繰り返すといずれ余りは 0 になる。

補足 割り算を繰り返して**余りが 0 になったときの割る数が**，2 つの整数の**最大公約数**である。

補足 最大公約数が 1 となったとき，互いに素であるといえる。

例） 次の 2 つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

1463，304



$$1463=304\cdot 4+247$$
$$304=247\cdot 1+57$$
$$247=57\cdot 4+19$$
$$57=19\cdot 3+0$$

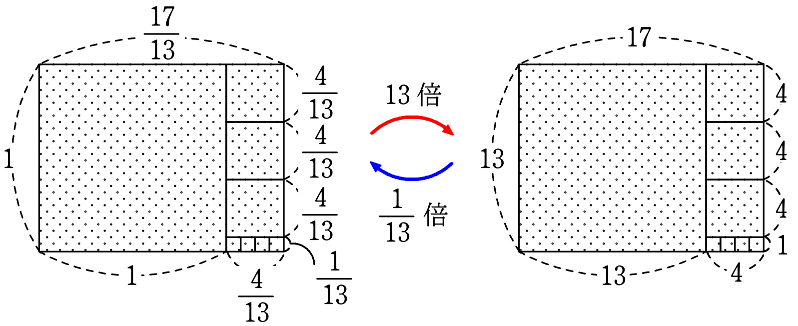
よって，1463 と 304 の最大公約数は 19

□$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

実数のうち，有理数でない数を無理数という。例えば，$\sqrt{2}$ は無理数である。ここまで，考える長方形や正方形の辺の長さを整数としていたが，これを有理数，無理数の範囲まで広げて，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明してみよう。

まずは，2 辺の長さがともに有理数である長方形に，1 辺の長さができるだけ大きい正方形をすき間なく敷き詰めることができるか考えてみよう。

ここでは，2 辺の長さが $\frac{17}{13}$，1 である長方形について考える。



上の図のように，この長方形を 13 倍に拡大すると，長方形の 2 辺の長さはそれぞれ自然数 17，13 になる。このとき，1 種類の正方形で敷き詰められるから，もとの大きさの長方形も 1 種類の正方形で敷き詰めることができる。

数学と人間の活動【互除法】 p.146～147，177

青チャートA: 例題133～134

練習２３） 2 辺の長さが $\dfrac{17}{13}$，1 である長方形にすき間なく敷き詰めることができる，最も大きい正方形の 1 辺の長さを求めよ。

解答 2 辺の長さが $\dfrac{17}{13}$，1 である長方形を 13 倍に拡大すると，長方形の 2 辺の長さは 17，13 になる。

この拡大した長方形にすき間なく敷き詰めることができる，最も大きい正方形の 1 辺の長さは，17 と 13 の最大公約数であるから，1 である。

よって，拡大した長方形をもとに戻して考えると，もとの長方形にすき間なく敷き詰めることができる，最も大きい正方形の 1 辺の長さは $\dfrac{1}{13}$

2 辺の長さがともに有理数である長方形は，1 種類の正方形で敷き詰めることができる。長方形を拡大または縮小しても，敷き詰める操作の回数は変わらないから，長方形の一方の辺の長さを 1 として考えよう。

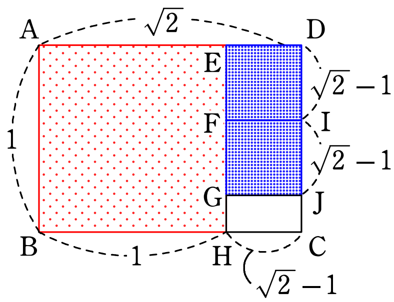
このとき，長方形のもう 1 辺の長さが有理数であるならば，1 種類の正方形で敷き詰めることができる。つまり，1 種類の正方形で敷き詰めることができない場合，長方形のもう 1 辺の長さは無理数である。

このことを利用して，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明してみよう。

2 辺の長さが $\sqrt{2}$，1 の長方形について考える。

① この長方形には 1 辺の長さ 1 の正方形を 1 個敷き詰めることができる。2 辺の長さが 1，$\sqrt{2}-1$ の長方形が残る。

② ① で残った長方形には，1 辺の長さ $\sqrt{2}-1$ の正方形を 2 個敷き詰めることができる。



練習２５） 上の図でもとの長方形 ABCD と相似である長方形を見つけ，それがもとの長方形と相似であることを証明せよ。

長方形 ABCD について $\dfrac{AD}{AB}=\sqrt{2}$

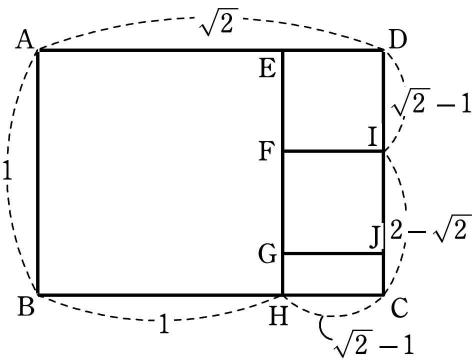
図から $CI=CD-DI=2-\sqrt{2}$

よって，長方形 CHFI について

$$\frac{CI}{CH}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}$$

ゆえに $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CI}{CH}$

したがって，長方形 CHFI は長方形 ABCD と相似である。



数学と人間の活動【互除法】 p.146〜147，177

青チャートA: 例題133〜134

もし，$\sqrt{2}$ が有理数ならば，2 辺の長さが $\sqrt{2}$，1 の長方形を 1 種類の正方形で敷き詰めることができるはずである。しかし，上で調べたように，正方形で敷き詰める操作の途中でもとの長方形と相似な長方形が現れ，この長方形を正方形で敷き詰めていく操作はいつまでも終わらない。

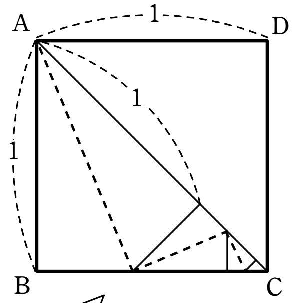
つまり，この長方形は 1 種類の正方形で敷き詰めることができない。

よって，$\sqrt{2}$ は無理数である。

繰り返しの状況になる

有限回で終わらない場合
「通約不能」であると呼ばれる

2 数 $\sqrt{2}$ と 1 とで互除法が終わらない
つまり　$\sqrt{2}$ が有理数でない
（$\sqrt{2}$ と 1 の比が有理数で表されない）
つまり　$\sqrt{2}$ は無理数である



ABとACの 2 つの線分について
長い方の線分から短い方の線分の整数倍を
取り除けるだけ取り除いていくと，操作が無限に続く
つまり ABとACの比が有理数で表せない