数学と人間の活動【不定方程式】p.152～157，178

青チャートA: 例題 135～145

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】性質を用いて、条件を満たす自然数の組を求めよう

□１次不定方程式

問題　桶に油が 10 升入っている。7 升入る枡と 3 升入る枡を使って，この油を 5 升ずつに分ける方法を答えよ。ただし，桶や枡には目盛がついていないものとする。

中学校では，方程式 $3x+4y=5$ を満たす x，y の組が無数にあることを学んだ。それでは，等式 $3x+4y=5$ を満たす<u>整数</u> x，y の組は存在するだろうか。まず，等式を満たす整数の組を 1 つ求める方法について考え，「1 次不定方程式を解く」ことができるようになろう。

○等式を満たす整数の組

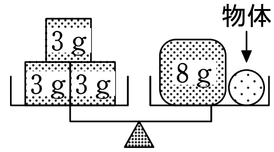
天秤ばかりを使うと，左右の皿に分銅と物体を，つり合うようにのせることで物体の質量を量ることができる。

ここでは，物体は右の皿にのせるとする。分銅が 3 g のものと 8 g のものの 2 種類しかない場合，分銅を左右の皿にのせて天秤ばかりをつり合わせることができるか考えてみよう。

物体の質量が 1 g の場合，

左の皿に 3 g の分銅を 3 個，右の皿に 8 g の分銅を 1 個のせれば，

天秤ばかりはつり合う。



練習２７） 物体の質量が 1 g，2 g，3 g，……，8 g の場合，分銅を左右の皿にどのようにのせれば天秤ばかりがつり合うか，次の表にまとめよ。ただし，同じ種類の分銅は左右どちらか一方の皿のみにのせるものとする。

物体の質量	1g	2g	3g	4g	5g	6g	7g	8g
3 g の分銅 (左)	3	0	1	4	0	2	5	0
8 g の分銅 (左)	0	1	0	0	1	0	0	1
3 g の分銅 (右)	0	2	0	0	1	0	0	0
8 g の分銅 (右)	1	0	0	1	0	0	1	0

M を自然数とし，物体の質量を M g とする。このとき，左の皿に3 g の分銅を x 個，8 g の分銅を y 個のせて天秤ばかりがつり合うとすると $3x+8y=M$ が成り立つ。ただし，右の皿に分銅を 1 個のせることは，左の皿に分銅を (-1) 個のせると考える。例えば，物体の質量が 1 g の場合は $3\cdot3+8\cdot(-1)=1$ と表される。

3 g と 8 g の分銅を使って，M g が量れるかどうかは $3x+8y=M$ を満たす整数 x，y の組が存在するかどうかという問題と同じである。

一般に，次のことが成り立つ。

2 つの整数 a，b が互いに素であるならば，どのような整数 c についても，$ax+by=c$ を満たす整数 x，y が存在する。

数学と人間の活動【不定方程式】p.152～157，178

青チャートA: 例題 135～145

□ 1 次不定方程式 $ax+by=c$ の整数解

a，b，c は整数の定数で，$a \fallingdotseq 0$，$b \fallingdotseq 0$ とする。x，y の 1 次方程式 $ax+by=c$ を成り立たせる整数 x，y の組を，この方程式の **整数解（その１つを特殊解、まとめて一般解と呼ぶこともある）** という。この方程式の整数解を求めることを **1 次不定方程式 を解く** という。

整数解は 1 つではない。

○ 1 次不定方程式 $ax+by=0$ （ $c=0$ のとき）の整数解

まず，方程式　　$3x+4y=0$ …… ① の整数解をすべて求めることを考えてみよう。

x，y を ① の整数解とすると $3x=-4y$ が成り立つ。

$4y$ は 4 の倍数であるから，$3x$ も 4 の倍数である。

3 と 4 は互いに素であるから，x は 4 の倍数であり，整数 k を用いて $x=4k$ と表される。

$x=4k$ を $3x=-4y$ に代入すると

$$3\cdot 4k=-4y \quad \text{すなわち} \quad y=-3k$$

よって，① の整数解は，整数 k を用いて　$x=4k$，$y=-3k$ と表される。

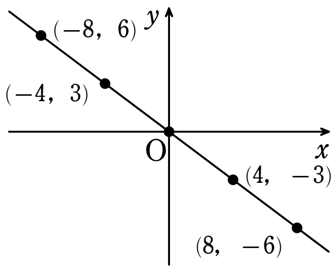
逆に，この形で表される整数 x，y の組は，① の整数解である。

以上から，① のすべての整数解は，次のように表される。

$$x=4k,\ y=-3k \quad (k \text{ は整数}) \quad \cdots\cdots ②$$

k は整数であればどのような値でもよい。
すなわち，整数解は無数に存在する。

参考 ② において，k に整数を代入した x，y の組は無数にある。方程式 $3x+4y=0$ の整数解 (x, y) は，座標平面上で $y=-\dfrac{3}{4}x$ （$3x+4y=0$ ）が表す直線上の点のうち，x 座標，y 座標がともに整数であるものを表している。



一般に，次のことがいえる。

2 つの整数 a，b が互いに素であるとき，方程式 $ax+by=0$ の
すべての整数解は，次のように表され，整数解は無数に存在する。

$$\boldsymbol{x=bk,\ y=-ak} \quad (\boldsymbol{k} \textbf{ は整数})$$

$$\boxed{a}\cdot\boxed{x}=\boxed{b}\cdot\boxed{(-y)}$$

注意 上の整数解は，$x=-bk$，$y=ak$ （k は整数）とも表される。
異符号の一般解になるときは，どちらにつけてもよい。

数学と人間の活動【不定方程式】 p.152〜157, 178

青チャートA: 例題135〜145

□１次不定方程式 $ax+by=c$ （ $c\neq 0$ のとき）の整数解

次に， $c\neq 0$ のときの整数解をすべて求めてみよう。

$ax=-by$ の形にできない ⇒ ① 整数解の１つ（特殊解） $x=\square$，$y=☆$ を求める

ここが
ポイントになる

⇒ ② 与式と特殊解を用いた２式の差を取り、「 $a(x-\square)+b(y-☆)=0$ 」の形にする

つまり $c=0$ となるので $ax+by=0$ と同じように考えられる！

⇒ ③ 「 $a(x-\square)=-b(y-☆)$ 」の形にする

⇒ ④ 係数（ a と b ）が互いに素であることから、x の倍数を特定して一般解を出す

⇒ ⑤ y の一般解を求める

例題） 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$4x+7y=1$

解答 $4x+7y=1$ …… ①

$x=2$，$y=-1$ は，
① の整数解の１つである。

教科書などではあっさりと書かれていることが多いが、ここが一番大変である。
色々な求め方があるが，今回は代入法で確認する。

$7y=1-4x$ なので $1-4x$ が７の倍数になるものを代入して探していくと

x	1	2	3	4
$-4x$	-4	-8	-12	-16
$1-4x$	-3	-7	-11	-15

となるので $7y=-7$ より

$x=2$， $y=-1$

①に代入すると

$4\cdot 2+7\cdot(-1)=1$ …… ②

①－② から $4(x-2)+7\{y-(-1)\}=0$

$$\begin{array}{rcccl} & 4\,\boxed{x} & +7\,\boxed{y} & = & \boxed{1} \\ -) & 4\,\boxed{2} & +7\,\boxed{(-1)} & = & \boxed{1} \\ \hline & 4\,\boxed{(x-2)} & +7\,\boxed{(y+1)} & = & \boxed{0} \end{array}$$

$4x+4\cdot(-2)+7y+7\cdot 1=1-1$ をはさんでも良いが
慣れてきたら点線の所だけで計算する

すなわち $4(x-2)+7(y+1)=0$

移項して

$4(x-2)=-7(y+1)$ …… ③

４と７は互いに素であるから，

$x-2$ は７の倍数である

$$\boxed{4}\,\boxed{(x-2)}=\boxed{7}\cdot\boxed{\{-(y+1)\}}$$

４と７は互いに素なので
そこがペアになることはない。
その為互い違いにペアになる。

よって整数 k を用いて $x-2=7k$ とかける

また③に $x-2=7k$ を代入すると

$4\cdot 7k=-7(y+1)$

-7 で両辺を割って $-4k=y+1$

したがって，① のすべての整数解は

$x=7k+2$，$y=-4k-1$ （k は整数）

注意 方程式 ① の整数解の１つとして $x=-5$，$y=3$ を用いると，① のすべての整数解は，

$x=7l-5$，$y=-4l+3$ （l は整数）と求められる。

これは整数解全体として，上でで求めた解と同じものを表している。

（ $l=1$ とすると， $x=7-5=2$ ， $y=-4+3=-1$ が求められる）

また， $x-2$ を -7 の倍数とすると $x=-7k+2$ ， $y=4k-1$ と表すことになる。

これらはどれも正解となる。（答えの表し方は１通りではないということ）

数学と人間の活動【不定方程式】 p.152～157, 178

青チャートA: 例題 135～145

□１次不定方程式 $ax+by=c$ （ $c \fallingdotseq 0$ のとき）の整数解

ここが
ポイントになる

$ax=-by$ の形にできない ⇒ ① 整数解の１つ（特殊解） $x=\square$, $y=☆$ を求める

⇒ ② 与式と特殊解を用いた２式の差を取り、「 $a(x-\square)+b(y-☆)=0$ 」の形にする

つまり $c=0$ となるので $ax+by=0$ と同じように考えられる！

⇒ ③ 「 $a(x-\square)=-b(y-☆)$ 」の形にする

⇒ ④ a, b が互いに素であることから、$x-\square=bk$ （ k は整数）

⇒ ⑤ ③④より $a\times bk=-b(y-☆)$ となるので $-ak=y-☆$

よって $x=bk+\square$, $y=-ak+☆$ となる

②以降は
毎回同じ流れ

問１） 方程式 $45x-32y=4$ の整数解をすべて求めよ。

方針 45 と 32 は互いに素であるから， $45x-32y=4$ を満たす整数 x, y は必ず存在するが，

実際にそれらの整数を見つけるのは簡単ではない。

このような場合，まず，整数解を 1 つ見つけるとよい。

$ax+by=1$ を満たす整数の組が
$x=p$, $y=q$ であるとき，
$ax+by=c$ を満たす整数 x, y の組は
$x=cp$, $y=cq$ として得られる。

【見つけ方その１：代入法】

（まずはとりあえず $45x-32y=1$ とすることがポイント）

$32y=45x-1$ であるから $45x-1$ に代入して 32 の倍数になるものを探していく

x	1	2	3	4	5
$45x$	45	90	135	180	225
$45x-1$	44	89	134	179	224

メリット：１桁ぐらいなら力尽くで出せる
デメリット：桁数が大きくなると○の倍数かどうかが
わかりにくいし、大変
「$=4$」のままやっていたら $x=20$ までかかる

$32y=224$ より $y=7$ なので $x=5$, $y=7$ は，

$45x-32y=1$ の整数解の 1 つである。

よって $45\cdot5-32\cdot7=1$ の両辺を 4 倍すると $45\cdot20-32\cdot28=4$ となる。

【見つけ方その２：整除法】

（これもまずはとりあえず $45x-32y=1$ とすることがポイント）

$32y=45x-1$ から $y=\dfrac{45x-1}{32}$ が整数になるためには、分子が32 の倍数になるものを探していく

このままだと【その１】と同じであるが、$y=\dfrac{45x-1}{32}=\dfrac{32x+13x-1}{32}=x+\dfrac{13x-1}{32}$ とすることで

$13x-1$ が32 の倍数になればよいことがわかるので

$13x-1$	32	64	96	128	160
$13x$	33	65	97	129	161
x		5			

メリット：１桁ぐらいなら力尽くで出せる
逆から調べるので絞り込みが多少早い（かも）
デメリット：桁数が大きくなると○で割れるかが
わかりにくいし、大変

$y=5+\dfrac{64}{32}=5+2$ より $y=7$ なので $x=5$, $y=7$ は，$45x-32y=1$ の整数解の 1 つである。

よって $45\cdot5-32\cdot7=1$ の両辺を 4 倍すると $45\cdot20-32\cdot28=4$ となる。

【見つけ方その３：ユークリッドの互除法】

（これもまずはとりあえず $45x-32y=1$ とすることがポイント）

45 と 32 に互除法を用いると

$45=32\cdot1+13$　移項すると $13=45-32\cdot1$

$32=13\cdot2+6$　移項すると $6=32-13\cdot2$

$13=6\cdot2+1$　移項すると $1=13-6\cdot2$

よって $1=13-6\cdot2=13-(32-13\cdot2)\cdot2=13\cdot5-32\cdot2$

$=(45-32\cdot1)\cdot5-32\cdot2=45\cdot5-32\cdot7$

したがって，最初と最後を逆にすると

$45\cdot5-32\cdot7=1$

よって $45\cdot5-32\cdot7=1$ の両辺を 4 倍すると

$45\cdot20-32\cdot28=4$ となる。

①割る数を余りでどんどん割っていく

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 2 & 1 \\ 6) & 13) & 32) & 45 \\ & 12 & 26 & 32 \\ \hline & 1 & 6 & 13 \end{array}$$

③式にすると…

②１次不定方程式では余りが１になったら終了

余り１なら最大公約数は１つまり『互いに素』

メリット：教科書で取り上げている王道の流れ
桁数が多くても頑張れば出せる
デメリット：とにかく書く量が多くなる＝時間がかかる
やはり「＝１」にしなくてはいけない

【見つけ方その４：割り算の等式の活用】

（これもまずはとりあえず $45x-32y=1$ とすることがポイント）

$45=32\cdot1+13$ より，方程式は $(32\cdot1+13)x-32y=1$ となる。

整理すると　$13x+32(x-y)=1$

13□＋32○＝1

$32=13\cdot2+6$ より $13x+(13\cdot2+6)(x-y)=1$

整理すると　$13(3x-2y)+6(x-y)=1$

$3x-2y=m$，$x-y=n$ とおくと $13m+6n=1$ …… ①

$m=1$，$n=-2$ は ① を満たす。

13■＋6●＝1
■＝1，●＝−2
が等式を満たす。

このとき　$3x-2y=1$，$x-y=-2$

これを解いて　$x=5$，$y=7$

4 倍すると　$x=20$，$y=28$

メリット：$a=b\cdot q+r$ を２回繰り返す
→代入法 or 整除法→連立方程式なので手は付けやすい
デメリット：書く量がやや多くなる＝時間がかかる
やはり「＝１」にしなくてはいけない

【見つけ方その５：合同式】

$45x-32y=4$ より 45 と 32 は互いに素であることから

$45x\equiv4 \pmod{32}$

→ 32 を加えて → $45x\equiv36 \pmod{32}$

→ 32 と 9 は互いに素なので 9 で割る → $5x\equiv4 \pmod{32}$

→ $32\times3=96$ を加えて → $5x\equiv100 \pmod{32}$

→ 32 と 5 は互いに素なので 5 で割る → $x\equiv20 \pmod{32}$

$x=20$ を $45x-32y=4$ に代入すると $900-32y=4$ なので $-32y=-896$ $\therefore\ y=28$

よって $45\cdot20-32\cdot28=4$ となる。

メリット：慣れれば簡単に出せる。＝１にしなくても出せる。
デメリット：教科書などでは発展扱いのやり方。

数学と人間の活動【不定方程式】 p.152～157, 178

青チャートA: 例題135～145

【整数解が１つ見つかったら、あとは前回と同じ流れで解いていく】

$45x-32y=4$ …… ①

$x=20$, $y=28$ は，整数解の 1 つである。

よって　$45\cdot 20-32\cdot 28=4$ …… ②

①－② から　$45(x-20)-32(y-28)=0$

$45(x-20)=32(y-28)$ …… ③

$$\begin{array}{rr|c|c|c|c|c}
 & 45 & x & -32 & y & = & 4 \\
-) & 45 & 20 & -32 & 28 & = & 4 \\
\hline
 & 45 & (x-20) & -32 & (y-28) & = & 0
\end{array}$$

45 と 32 は互いに素であるから，③より

$x-20=32k$,

③に代入して　$45\cdot 32k=32(y-28)$

より $y-28=45k$ （k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=32k+20$, $y=45k+28$ （k は整数）

> 整数解がわかれば答えは
>
> $x=bk+\square$,　$y=-ak+☆$
>
> の形

練習） 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$29x+42y=5$

(解説)

$29x+42y=5$ …… ①

$x=-13$, $y=9$ は，$29x+42y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$29\cdot(-13)+42\cdot 9=1$

両辺に 5 を掛けると

$29\cdot(-65)+42\cdot 45=5$ …… ②

①－② から　$29(x+65)+42(y-45)=0$

$29(x+65)=-42(y-45)$ …… ③

29 と 42 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x+65=42k$, $y-45=-29k$ （k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=42k-65$, $y=-29k+45$ （k は整数）

> 参考 2
>
> $42y\equiv 5 \pmod{29}$
>
> $42y\equiv 63 \pmod{29}$
>
> $6y\equiv 9 \pmod{29}$
>
> $2y\equiv 3 \pmod{29}$
>
> $2y\equiv 32 \pmod{29}$
>
> $y\equiv 16 \pmod{29}$
>
> $y=16$ を代入すると
>
> $29x+672=5$
>
> $29x=-667$
>
> $x=-23$
>
> $\therefore\ 29\cdot(-23)+42\cdot 16=5$

参考 1　29 と 42 に互除法を用いると

$42=29\cdot 1+13$　移項すると　$13=42-29\cdot 1$

$29=13\cdot 2+3$　移項すると　$3=29-13\cdot 2$

$13=3\cdot 4+1$　移項すると　$1=13-3\cdot 4$

よって　$1=13-3\cdot 4=13-(29-13\cdot 2)\cdot 4=29\cdot(-4)+13\cdot 9$

$=29\cdot(-4)+(42-29\cdot 1)\cdot 9=29\cdot(-13)+42\cdot 9$

したがって，$29x+42y=1$ の整数解の 1 つは $x=-13$, $y=9$ である。

数学と人間の活動【不定方程式】p.152～157，178

青チャートA: 例題 135～145

補足　2 次の不定方程式

整数 x，y が方程式 $xy=3$ を満たすとき，x，y はそれぞれ 3 の約数である。よって，この方程式の整数解をすべて求めると，次のようになる。

x	1	3	-1	-3
y	3	1	-3	-1

より　$(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(-1,\ -3)$，$(-3,\ -1)$

この考え方を利用すると，次の 2 次の不定方程式を解くことができる。

$(x+a)(y+b)=c$　（a，b，c は整数）

例１） 方程式 $(x-3)(y+2)=3$ の整数解をすべて求める。

x，y は整数であるから，$x-3$，$y+2$ も整数である。

よって

$(x-3,\ y+2)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(-1,\ -3)$，$(-3,\ -1)$

ゆえに

$(x,\ y)=(4,\ 1)$，$(6,\ -1)$，$(2,\ -5)$，$(0,\ -3)$　終

	$x-3$	1	3	-1	-3
	$y+2$	3	1	-3	-1
$+3$	x	4	6	2	0
-2	y	1	-1	-5	-3

表を活用するのも工夫のひとつ

例題） 等式 $xy+4x-y=6$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

方針　因数分解をして　(　　)×(　　)＝○ の形に変形して例 1 と同様に解こう！

$xy+4x-y=6$ の左辺に注目してペアを考えると…　→

	x	-1
y	xy	$-y$
$+4$	$+4x$	-4

x と $+4$，y と -1 がペアになるような因数分解の式は $(x-1)(y+4)$

$(x-1)(y+4)$ を展開すると　$(x-1)(y+4)=xy+4x-y-4$

したがって　$xy+4x-y=(x-3)(y+4)+4$

よってもとの式は　$(x-1)(y+4)+4=6$

$(x-1)(y+4)=2$

x，y は整数であるから，$x-1$，$y+4$ も整数である。

$\therefore (x,\ y)=(2,\ -2)$，$(3,\ -3)$，$(0,\ -6)$，$(-1,\ -5)$

$x-1$	1	2	-1	-2
$y+4$	2	1	-2	-1
x	2	3	0	-1
y	-2	-3	-6	-5

数学と人間の活動【不定方程式】 p.152～157，178

青チャートA: 例題135～145

例題） $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=1$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。【青チャート数学A演習例題１４３類題】

解答 両辺に xy を掛けると　$y+3x=xy$　　すなわち　$xy-3x-y=0$

変形すると　$(x-1)(y-3)=3$

x，y は自然数であるから，

$x-1$，$y-3$ は整数で　$x-1\geqq 0$，$y-3\geqq -2$

よって　$(x-1,\ y-3)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(2,\ 6),\ (4,\ 4)$

$x-1$	1	3
$y-3$	3	1
x	2	4
y	6	4

練習３） 次の問いに答えよ。

(1)　$2x^2+7xy+3y^2+11x+13y+12$ を因数分解せよ。

(2)　方程式 $2x^2+7xy+3y^2+11x+13y=60$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

【青チャート数学A演習例題１４４類題】

解答

(1)　$2x^2+7xy+3y^2+11x+13y+12=2x^2+(7y+11)x+(3y^2+13y+12)$

$$\begin{array}{llcl} 1 & 3y+4 & \longrightarrow & 6y+8 \\ 2 & y+3 & \longrightarrow & y+3 \\ \hline 2 & (3y+4)(y+3) & & 7y+11 \end{array}$$

$=2x^2+(7y+11)x+(y+3)(3y+4)$

$=\{x+(3y+4)\}\{2x+(y+3)\}$

$=(x+3y+4)(2x+y+3)$

(2)　$2x^2+7xy+3y^2+11x+13y=60$ から　$2x^2+7xy+3y^2+11x+13y+12=72$

(1) の結果から　$(x+3y+4)(2x+y+3)=72$　…… ①

x，y は自然数であるから，$x+3y+4$，$2x+y+3$ はともに自然数である。

$x+3y+4\geqq 8$，$2x+y+3\geqq 6$ であるから，

① を満たす自然数 $x+3y+4$，$2x+y+3$ の組は次のようになる。

$(x+3y+4,\ 2x+y+3)=(12,\ 6),\ (9,\ 8),\ (8,\ 9)$

[1]　$x+3y+4=12$，$2x+y+3=6$ のとき

整理すると　$x+3y=8$，$2x+y=3$

これを満たす自然数 x，y の組は存在しない。

[2]　$x+3y+4=9$，$2x+y+3=8$ のとき

整理すると　$x+3y=5$，$2x+y=5$

これを解くと　$x=2$，$y=1$

[3]　$x+3y+4=8$，$2x+y+3=9$ のとき

整理すると　$x+3y=4$，$2x+y=6$

これを満たす自然数 x，y の組は存在しない。

[1] ～ [3] から，求める自然数 x，y の組は

$(x,\ y)=(2,\ 1)$

$x+3y+4$	12	9	8
$2x+y+3$	6	8	9
$x+3y$	8	5	4
$2x+y$	3	5	6
$2x+6y$	16	10	8
$5y$	13	5	2
y		1	