数学と人間の活動【記数法】 p.158〜161

青チャートA: 例題146〜153

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

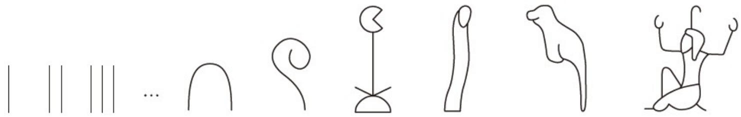
【内容目標】歴史的経緯や社会的役割なども踏まえつつ、記数法を使いこなそう。

□記数法

私たちは，136，2904 のように，0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 の 10 個の数字を用いて数を表している。このように，数を表す方法を **記数法** という。記数法の歴史は古く，現代とは異なる記数法が紀元前から用いられていた記録がある。ここでは，古代の記数法，現代の記数法について学ぼう。

○古代の記数法

紀元前 3000 年頃，ナイル川流域でエジプト文明が栄えた。古代エジプトでは，ものの形をかたどった象形文字と呼ばれる文字が使われ，数は次のような象形文字で表されていた。



1　2　3　…　10　100　1000　10000　100000　1000000

この記数法では，| が 10 個集まると ∩ となり，∩ が 10 個集まると  となるように，1 つの記号が 10 個集まるたびに新しい記号を用いている。

例 １２） 古代エジプトの記数法

(1)  は，2513 を表す。

(2)  は，1030067 を表す。 終

紀元前 8 世紀頃から栄えた古代ローマでも使われていたといわれるローマ数字は，現代でも時計の文字盤などに見られる。ローマ数字は次のようになっている。

I	II	III	IV	V	VI	IX	X	L	C	D	M
1	2	3	4	5	6	9	10	50	100	500	1000

ローマ数字による記数法では，5 個集まると新しい記号を用いる方法と，10 個集まると新しい記号を用いる方法の 2 つが，あわせて用いられている。また，足し算と引き算の考えが使われている。

例１３） ローマ数字による記数法

(1) VIII は $\mathrm{V}+\mathrm{III}$ で，$5+3=8$ を表す。

(2) IV は $\mathrm{V}-\mathrm{I}$ で，$5-1=4$ を表す。

(3) LXX は $\mathrm{L}+\mathrm{X}+\mathrm{X}$ で，$50+10+10=70$ を表す。

(4) MCDXIX は $\mathrm{M}+(\mathrm{D}-\mathrm{C})+\mathrm{X}+(\mathrm{X}-\mathrm{I})$ で，

$1000+(500-100)+10+(10-1)=1419$ を表す。 終

注意 2 つの異なるローマ数字が小 → 大の順に並んだ場合，それが表す数は大きい方の数から小さい方の数を引いた値になる。

数学と人間の活動【記数法】 p.158～161

青チャートA: 例題 146～153

□現代の記数法

千	百	十	一
10^3	10^2	10^2	10^0
1	2	3	4

$10^0=1$

現代において，日常的に使用されている記数法を見てみよう。

数を表すには，日常は位取りの基礎を 10 とする 10 進法 を用いる。例えば，10 進法で表された数 1234 の意味は，

$$1\cdot10^3+2\cdot10^2+3\cdot10^1+4\cdot10^0$$

である。10 進法では，位として 10^0 の位，10^1 の位，10^2 の位，10^3 の位，…… を用い，各位の数字は，上の位から順に，左から右へ並べる。また，各位の数字は 0 以上 9 以下の整数で，整数を 10 で割った余りの種類と同じである。10 進法のような，各位の数字を上の位から並べて数を表す方法を **位取り記数法** という。

深める　現代の記数法について，古代エジプトの記数法やローマ数字による記数法と異なる特徴を説明してみよう。

現代の記数法：0，1，2，……，9 の 10 個の数字でいくらでも大きい数を表すことができる。
0 がある（5 世紀頃の古代インドから使用されていた。3～4 世紀という話も）
古代の記数法：大きい数を表すたびに新しい記号が必要になる。0に該当する数字がない（空白としていたことはあった）。

千の位が 6，百の位が 7，十の位が 8，一の位が 9 である 4 桁の数は 6789 と書く。この表記は

$$6\cdot10^3+7\cdot10^2+8\cdot10^1+9\cdot10^0$$

という意味である。
この 6789 は，位取りの基礎を 10 とする表記法で，
この表記法を **10 進法** という。ここでは，10 進法以外の表記法について学ぼう。

千	百	十	一
10^3	10^2	10^2	10^0
6	7	8	9

$10^0=1$

□ n 進法

10進法では10になったら繰り上がる。n 進法では n になったら繰り上がる

10 進法では，位として　10^0 の位，10^1 の位，10^2 の位，10^3 の位，……
を用い，各位の数字を右から左へと順に並べている。各位の数字は，0，1，2，3，……，9 の いずれかで，10 で割った余りの種類と同じである。

同様の考え方で，位取りの基礎を 2 とする表記法を考えることができる。これを **2 進法** という。2 進法では，位として　2^0 の位，　2^1 の位，　2^2 の位，　2^3 の位，……
を用いる。各位の数字は 0 または 1 である。

2 で割った余りの種類

たとえば，2 進法で表された数 10011 は，10 進法では $1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$ を表す。2 進法で表された数 10011 を，10 進法の数と区別するため，$10011_{(2)}$ と書くことがある。

10 進法	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	16
2 進法	$1_{(2)}$	$10_{(2)}$	$11_{(2)}$	$100_{(2)}$	$101_{(2)}$	$110_{(2)}$	$111_{(2)}$	$1000_{(2)}$	$1001_{(2)}$	…	$10000_{(2)}$

各位の数字を上の位から並べて数を表す方法を，**位取り記数法** という。このとき，10 進法の場合の 10，2 進法の場合の 2 のように，**位取りの基礎となる数を 底** という。一般に，底を n として数を表す方法を **n 進法** といい，n 進法で表された数を **n 進数** という。ただし，n は 2 以上の自然数である。

n 進数は右下に $_{(n)}$ をつけて表すことにするが，10 進数ではふつう $_{(10)}$ を省略する。

数学と人間の活動【記数法】 p.158～161

青チャートA: 例題146～153

□底の変換（ n 進数 ⇒ 10 進数）

『縦に掛けて、横に足す』

例１４） n 進法で表された数を 10 進法で表す。

(1)　2 進数 $101101_{(2)}$ を 10 進法で表す。

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
64	32	16	8	4	2	1
	1	0	1	1	0	1

$$101101_{(2)}=1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$$
$$=1\cdot32+0\cdot16+1\cdot8+1\cdot4+0\cdot2+1\cdot1$$
$$=45$$

(3)　3 進数 $21120_{(3)}$ を 10 進法で表す。

3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
243	81	27	9	3	1
	2	1	1	2	0

$$21120_{(3)}=2\cdot3^4+1\cdot3^3+1\cdot3^2+2\cdot3^1+0\cdot3^0$$
$$=162+27+9+6+0$$
$$=204$$

(3)　5 進数 $2041_{(5)}$ を 10 進法で表す。

5^3	5^2	5^1	5^0
125	25	5	1
2	0	4	1

$$2041_{(5)}=2\cdot5^3+0\cdot5^2+4\cdot5^1+1\cdot5^0$$
$$=2\cdot125+0\cdot25+5\cdot4+1\cdot1=250+20+1$$
$$=271$$

□底の変換（ 10 進数 ⇒ n 進数 ）

10 進数を 2 進法で表すための計算方法を考えよう。

【その１】 割る数を n として，割り算を繰り返し，各位の数字を求める

$$13=1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$$

13 を 2 で割ると　　商は 6，余りは 1

余り 1 が 2^0 の位の数字である。

商 6 を 2 で割ると　　商は 3，余りは 0

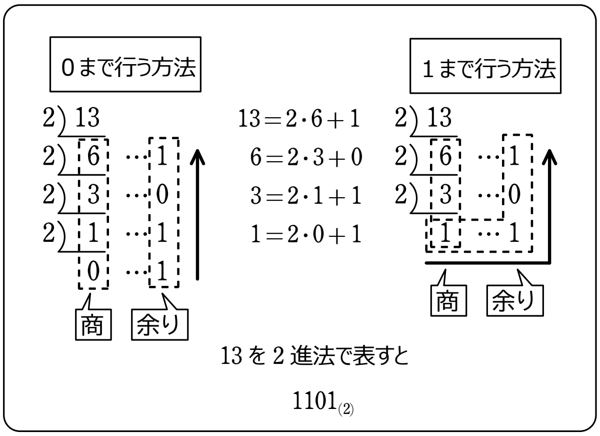
余り 0 が 2^1 の位の数字である。

商 3 を 2 で割ると　　商は 1，余りは 1

余り 1 が 2^2 の位の数字である。

商 1 を 2 で割ると　　商は 0，余りは 1

余り 1 が 2^3 の位の数字である。



13 を 2 で割り，商を 2 で割る割り算を繰り返し，出てきた余りを逆順に並べると，13 の 2 進法による表示 $1101_{(2)}$ が得られる。

10 進法で表された数を n 進法で表すには，割る数を n にして，上と同様の割り算を繰り返し，各位の数字を求めればよい。

数学と人間の活動【記数法】 p.158～161

青チャートA: 例題146～153

【その２】 表を使って寄せていく

割る数を n として，
引き算を繰り返し，
引いた回数で各位の
数字を求めればよい。

桁	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	32	16	8	4	2	1
47	1	0	1	1	1	1
残り	15	15	7	3	1	0

$47-32\cdot1=15$
15 から 16 は引けない
$15-8\cdot1=7$
$7-4\cdot1=3$
$3-2\cdot1=1$
$1-1\cdot1=0$

47 から $2^{\bigcirc}$ を引いて，引いた回数を並べて　$101111_{(2)}$

コンピュータでは，文字 1 個に「文字コード」と呼ばれる数値 1 個を割り当て，その数値で文字を区別している。

例えば，「日」という漢字を文字コードで表すと，2 進法の 16 桁の数となる。ただし，16 桁だと桁が多く扱いにくいため，実際には

0100　0110　0111　1100

のように右から 4 桁ずつ区切り，各区切りで 16 進法を用いて 1 つの数で表す。

16 進法では，10 ～ 15 をアルファベットの A ～ F で表す。

$0100_{(2)}=4=4_{(16)}$，$0110_{(2)}=6=6_{(16)}$，$0111_{(2)}=7=7_{(16)}$，$1100_{(2)}=12=\mathrm{C}_{(16)}$

であるから，「日」の文字コードは 467C となる。

(＊) 日本語の文字コードはいくつかの種類がある。ここでは，「JIS コード」と呼ばれる文字コードを例にとっている。

□n 進法の小数【青チャート数学A基本例題１４７類題】

□底の変換（ n 進数 ⇒ 10 進数）

10 進法の小数 0.625 は，$0.625=0.6+0.02+0.005=6\cdot\dfrac{1}{10^1}+2\cdot\dfrac{1}{10^2}+5\cdot\dfrac{1}{10^3}$ と表される。

つまり

10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{10^2}$	$\dfrac{1}{10^3}$
0.	6	2	5

とみることができる。

ただし $\square^{-\bigcirc}=\dfrac{1}{\square^{\bigcirc}}$ である

（負の指数乗は逆数になる）

n 進法では，小数点以下の位は $\dfrac{1}{n^1}$ の位，$\dfrac{1}{n^2}$ の位，$\dfrac{1}{n^3}$ の位，…… である。

例） 10 進法で表せ。

(1) $0.1021_{(5)}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{0}{5^2}+\dfrac{2}{5^3}+\dfrac{1}{5^4}$

$=0.2+0+2\times0.008+0.0016$

$=0.2176$

『縦に掛けて、横に足す』

5^0	5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}	5^{-4}
1	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5^2}$	$\dfrac{1}{5^3}$	$\dfrac{1}{5^4}$
0.	1	0	2	1

(2) $21.201_{(5)}$ を

$21_{(5)}=2\cdot 5+1$

$=10+1=11$

$0.201_{(5)}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{0}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}$

$=2\times 0.2+0+0.008$

$=0.408$

よって $21.201_{(5)}=11.408$

『縦に掛けて、横に足す』

5^1	5^0	5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}
5	1	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5^2}$	$\dfrac{1}{5^3}$
2	1.	2	0	1

表の段階で小数に直す方法もあるが
・書く量が増える
・無限小数になることもある
ため、使い分けは必要

分けて書いたが
まとめて処理してもＯＫ

$21.201_{(5)}=2\cdot 5+1\cdot 1+2\cdot\dfrac{1}{5}+0\cdot\dfrac{1}{5^2}+1\cdot\dfrac{1}{5^3}$

$=10+1+0.4+0+0.008$

$=11+0.408=11.408$

□底の変換（ 10 進数 ⇒ n 進数 ）

$0.625=1\cdot\dfrac{1}{2^1}+0\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}$ であり，10 進数 0.625 は 2 進法で表すと $0.101_{(2)}$ である。

10 進法の小数を 2 進法で表すための計算方法を考えよう。

【その１】

0.625 に 2 を掛けると 1.25

整数部分 1 が $\dfrac{1}{2^1}$ の位の数字である。

$1.25-1=0.25$ に 2 を掛けると 0.5

整数部分 0 が $\dfrac{1}{2^2}$ の位の数字である。

$0.5-0=0.5$ に 2 を掛けると 1

整数部分 1 が $\dfrac{1}{2^3}$ の位の数字である。

$$\begin{array}{rl} & 0.625 \\ \times & 2 \\ \hline & 1.25 \quad \leftarrow 0.625\times 2 \\ \times & 2 \\ \hline & 0.5 \quad \leftarrow 0.25\times 2 \\ \times & 2 \\ \hline & 1 \quad \leftarrow 0.5\times 2 \end{array}$$

0.625 を 2 進法で表すと $0.101_{(2)}$

整数になるまで 2 を掛ける掛け算をして，出てきた数の整数部分を<u>**順に**</u>並べた $0.101_{(2)}$ が求める 2 進数である。10 進法の小数を n 進法の小数で表すには，掛ける数を n として，上のように掛け算を繰り返し，各位の数字を求めればよい。

【その２】

引き算を繰り返し，引いた回数で各位の数字を求めればよい。

桁	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$
	1	0.5	0.25	0.125
0.625	0	1	0	1
残り		0.125	0.125	0

$0.625-0.5=0.125$
$0.125-0.25$ はダメ
$0.125-0.125=0$

よって $0.101_{(2)}$

この解き方は２進数や５進数、８進数でないと
有限小数にならないため、解きづらくなるので注意が必要

数学と人間の活動【記数法】 p.158〜161

青チャートA: 例題146〜153

□ n 進数の四則演算

次の計算をせよ。【青チャート数学A基本例題１４８類題】

(1) $10110_{(2)}+1011_{(2)}=100001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\quad 1011 \\ \hline 100001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10110 \\ +\quad 1011 \\ \hline 11121 \\ 11201 \\ 12001 \\ 20001 \\ \hline 100001 \end{array}$$

普通に足してから
繰り上げていく
イメージ

2進数なので
2以上は繰り上がる

(2) $1022_{(3)}+212_{(3)}=2011_{(3)}$

$$\begin{array}{r} 1022 \\ +\quad 212 \\ \hline 2011 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1022 \\ +\quad 212 \\ \hline 1234 \\ 1241 \\ 1311 \\ \hline 2011 \end{array}$$

普通に足してから
繰り上げていく
イメージ

3進数なので
3以上は繰り上がる

(3) $32043_{(5)}-3214_{(5)}=23324_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 32043 \\ -\quad 3214 \\ \hline 23324 \end{array}$$

5進数なので
5を借りてくる

(4) $5346_{(7)}-2651_{(7)}=2365_{(7)}$

$$\begin{array}{r} 5346 \\ -\quad 2651 \\ \hline 2365 \end{array}$$

7進数なので
7を借りてくる

(5) $10101_{(2)}\times 101_{(2)}=1101001_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 10101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ \hline 1101001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10101 \\ \times\quad 101 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ \hline 1020201 \\ \hline 1101001 \end{array}$$

普通に掛けて
足してから
繰り上げていく
イメージ

(6) $423_{(5)}\times 312_{(5)}=244031_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\quad 312 \\ \hline 1401 \\ 423 \\ 2324 \\ \hline 244031 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & 4 & 2 & 3 \\ & & \times & 3 & 1 & 2 \\ \hline & & & 8 & 4 & 6 \\ & & 4 & 2 & 3 & \\ & 12 & 6 & 9 & & \\ \hline & 12 & 10 & 19 & 7 & 6 \\ & 12 & 10 & 19 & 8 & 1 \\ & 12 & 10 & 20 & 3 & 1 \\ & 12 & 14 & 0 & 3 & 1 \\ & 14 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

5進数は
5で繰り上がる
桁の中で
20となれば
4繰り上がる

(7) $1100011_{(2)}\div 1001_{(2)}=1011_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ 1001\overline{)\,1100011} \\ 1001 \\ \hline 1101 \\ 1001 \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ \hline 0 \end{array}$$

2進数なので
2を借りてくる

(8) $4323_{(5)}\div 24_{(5)}=132_{(5)}$

$4_{(5)}\times 3$ は
2繰り上がる

$$\begin{array}{r} 132 \\ 24\overline{)\,4323} \\ 24 \\ \hline 142 \\ 132 \\ \hline 103 \\ 103 \\ \hline 0 \end{array}$$

5進数なので
5を借りてくる

数学と人間の活動【記数法】 p.158～161

青チャートA: 例題146～153

□数の不思議

数学では『 $1=0.999\cdots\cdots$ 』という話が出てくるがこれが正しいことを考えよう。

【その１】

分数 $\dfrac{1}{3}$ を小数で表すと， $\dfrac{1}{3}=0.333\cdots\cdots$

この両辺を 3 倍すると， $1=0.999\cdots\cdots$ ①

> $0.333\cdots\cdots\times 3=0.999\cdots\cdots$ は正しい？

【その２】

1 と $0.999999\cdots\cdots$ の両辺の差は，1 と小数点の後に 9 が n 個続く有限小数

$$1-\underbrace{0.999\cdots\cdots 999}_{n\text{ 個}}=\frac{1}{10^{n}}$$

より小さい数ですから，両辺の差はどんなに小さい正の数よりも小さくなります。

そのような数は 0 しかなく， $1-0.999\cdots\cdots=0$

$$1=0.999\cdots\cdots$$

> 勝手にみなしてよいの？

【その３】

$x=0.999999\cdots\cdots$ とすると

$$\begin{array}{rr} 10x= & 9.99999\cdots\cdots \\ +)\quad x= & 0.99999\cdots\cdots \\ \hline 9x= & 9 \end{array}$$

> $9.9999\cdots\cdots-0.9999\cdots\cdots=9$ は正しい？

よって $x=1$ であるから $1=0.999999\cdots\cdots$

【その４】

$$0.999999\cdots\cdots=0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+\cdots\cdots$$

$$=0.9\cdot(1+0.1+0.01+0.001+0.0001+0.00001+\cdots\cdots)$$

$$=0.9\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\cdots\cdots\right)$$

> 初項 0.9，公比 $\dfrac{1}{10}$ の等比数列の和
>
> （数学Ｂでの数列の話）

> 極限は数学Ⅱでの話

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}0.9\times\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}$$

> 初項 0.9，公比 $\dfrac{1}{10}$ の無限等比級数（数学Ⅲでの話）

$$=0.9\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=0.9\times\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{9}{10}\times\frac{10}{9}=1$$

> ∞に限りなく近づくとは？

> 大学で学ぶ『ε－δ 論法（イプシロン－デルタ）論法』などの話