数学と人間の活動【座標】 p.162～167

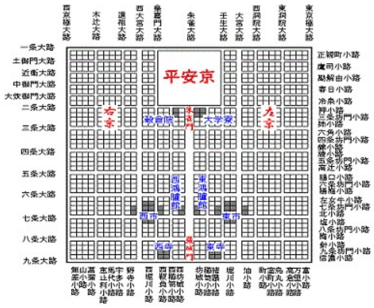
青チャートA: 例題154～156

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】ものの位置を表す方法を確認しておこう

□座標の考え方

京都の街は，道路が縦 (南北) と横 (東西) に格子状に並んでいる。
そして，縦の通りと横の通りの名前を組み合わせることで，それらの道が交差した場所を示す。このことは，座標の考え方と似ている。
ここでは，平面上の点の位置，空間の点の位置を表す座標について考えていこう。

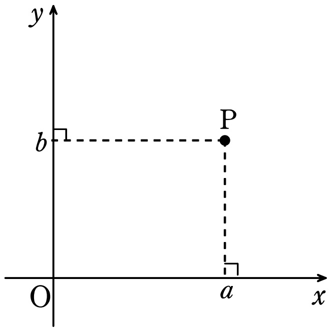


○平面上の点の位置

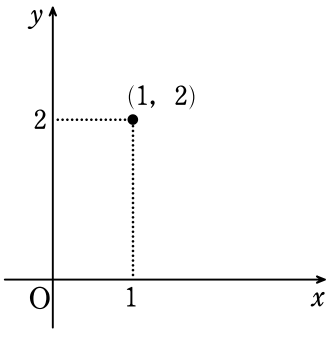
平面上に点 O をとる。点 O を共通の原点とし，O で互いに直交する 2 本の数直線を，右の図のように定める。これらの数直線を，それぞれ x 軸，y 軸といい，まとめて **座標軸** という。

平面上の点 P の位置は，右の図のような 2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される。この組 $(a,\ b)$ を点 P の座標といい，a を点 P の x 座標，b を点 P の y 座標 という。座標が $(a,\ b)$ である点 P を，P$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ と書く。

このように座標の定められた平面を **座標平面** と呼び，点 O を座標平面の **原点** という。原点 O の座標は $(0,\ 0)$ である。

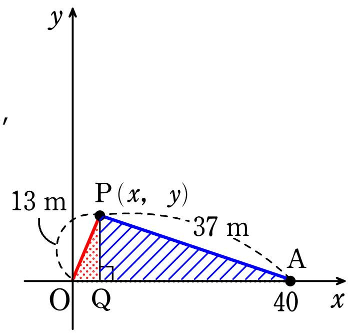


例１５） 平らな広場の地点 O を原点として，東の方向を x 軸の正の向き，北の方向を y 軸の正の向きとする座標 平面を考える。また，1 m を 1 の長さとする。
このとき，地点 O から東に 1 m，北に 2 m 進んだ位置にある点の座標は $(1,\ 2)$ である。 終



例１６） 例 15 の広場の地点 O と地点 A にはそれぞれ 1 本の木が植えてあり， A の座標は $(40,\ 0)$ である。そして， 2 点 O，A を結んだ線より北側の地点 P に宝物がある。地点 P は，O からの距離が 13 m，A からの距離が 37 m である。地点 P の位置を特定してみよう。
P の座標を $(x,\ y)$ とする。ただし， $y>0$ である。
右上の図において，△OPQ，△APQ は直角三角形であるから，それぞれに三平方の定理を用いると

$\boxed{x^2+y^2=13^2}$ …… ①，$\boxed{(40-x)^2+y^2=37^2}$ …… ②



①－② から　$x^2-(40-x)^2=-1200$

式を整理すると　$80x=400$　よって　$x=5$

これを ① に代入すると　$25+y^2=169$　すなわち　$y^2=144$

$y>0$ であるから　$y=12$

したがって，P の座標は $(5,\ 12)$ である。

地点 P は，O から東に 5 m，北に 12 m 進んだ位置にある。終

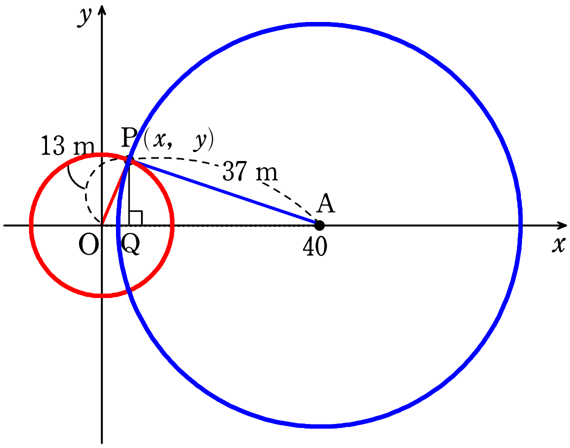
深める　例 16 で位置が特定できる仕組みを，「点 P を作図する」という観点から説明しよう。

解答

地点 P は，点 O を中心とする半径 13 m の円上にあり，かつ，点 A を中心とする半径 37 m の円上にある。

これらの円を作図すると，2 つの円の交点は O からの距離が 13 m で，かつ，A からの距離が 37 m の地点である。

したがって，これらの交点のうち，$y>0$ である方が点 P である。



○空間の点の位置

平面上の点の座標は 2 つの実数の組であったが，空間の点の座標は 3 つの実数の組である。そのことを見ていこう。

空間に点 O をとる。点 O を共通の原点とし，O で互いに直交する 3 本の数直線を右の図のように定める。これらの数直線を，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸 といい，まとめて **座標軸** という。

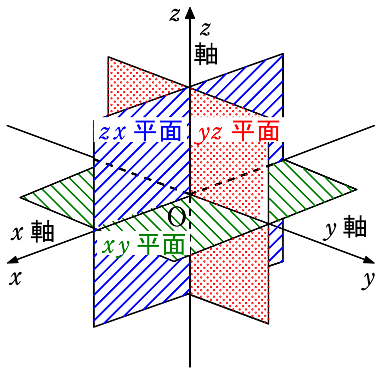
また，

x 軸と y 軸が定める平面を　**xy 平面**

y 軸と z 軸が定める平面を　**yz 平面**

z 軸と x 軸が定める平面を　**zx 平面**

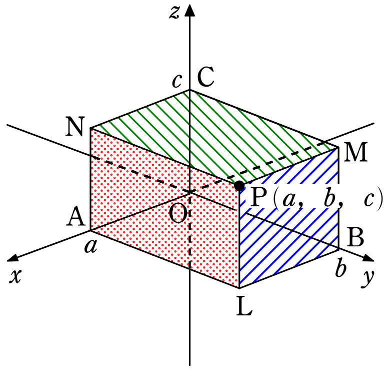
という。これらの 3 つの平面を，まとめて **座標平面** という。



数学と人間の活動【座標】 p.162～167

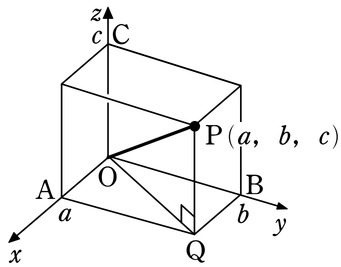
青チャートA: 例題154～156

空間の点 P を通る 3 つの平面を，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸に垂直に作る。それらの平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点を，それぞれ A，B，C とし，3 点 A，B，C の x 軸，y 軸，z 軸に関する座標を，それぞれ a，b，c とすると，空間の点 P の位置は，これら 3 つの実数の組 $(a,\ b,\ c)$ で表される。
この組 $(a,\ b,\ c)$ を点 P の **座標** といい，a，b，c をそれぞれ点 P の x 座標，y 座標，z 座標 という。座標が $(a,\ b,\ c)$ である点Pを，P$(a,\ b,\ c)$ と書く。



このように座標の定められた空間を 座標空間 と呼び，点 O を座標空間の **原点** という。原点 O の座標は $(0,\ 0,\ 0)$ である。

例１７） 平らな広場の地点 O を原点として，東の方向を x 軸の正の向き，北の方向を y 軸の正の向き，真上の方向を z 軸の正の向きとする座標空間を考える。また，1 m を 1 の長さとする。
例えば，地点 O から東に 1 m，北に 2 m 進み，真上に 3 m 上がった点の座標は $(1,\ 2,\ 3)$ である。 終



カーナビゲーションでは，3 個の GPS衛星 A，B，C から自動車 P までの距離を測定して，自動車の位置を特定する。
GPS 衛星は電波を発信していて，電波には自身の位置の情報と発信した正確な時刻の情報が含まれている。受信機を載せた自動車は，GPS 衛星からの電波を受信し，受信した時刻を測定する。そして GPS 衛星からの距離を (光の速さ)×(時間) で求める。
理想状態では 3 個の GPS 衛星があればよいが，受信機での時刻の測定が正確ではないため，4 個以上の GPS 衛星の情報をもとに計算している。

研究　２点間の距離

座標平面上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB を求めてみよう。
直線 AB が x 軸，y 軸のどちらにも平行でないとき，右の図において

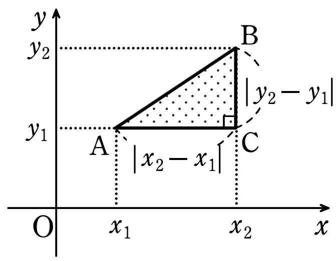
$\mathrm{AC}=|x_2-x_1|$，　$\mathrm{BC}=|y_2-y_1|$

△ABC は直角三角形であるから，三平方の定理を用いると

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2$

よって，2 点 A，B 間の距離は

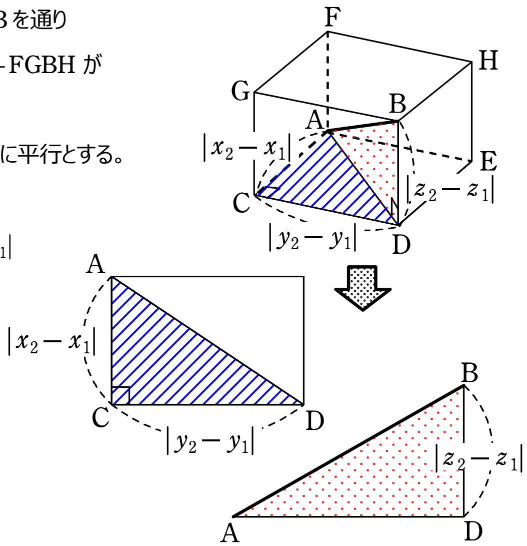
$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



数学と人間の活動【座標】 p.162～167

青チャートA: 例題154～156

同じように，座標空間における 2 点 A $(x_1,\ y_1,\ z_1)$，B $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離を求めてみよう。



点 A を通り各座標平面に平行な 3 つの平面と，点 B を通り各座標平面に平行な 3 つの平面で，直方体 ACDE−FGBH ができる場合を考える。

ただし，AC，AE，AF がそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に平行とする。

このとき，直方体の 3 辺 AC，CD，DB の長さは

$$AC=|x_2-x_1|,\ CD=|y_2-y_1|,\ DB=|z_2-z_1|$$

△ACD，△ADB は直角三角形であるから，

三平方の定理を用いると

$$AB^2=AD^2+DB^2=(AC^2+CD^2)+DB^2$$

よって，2 点 A，B 間の距離は

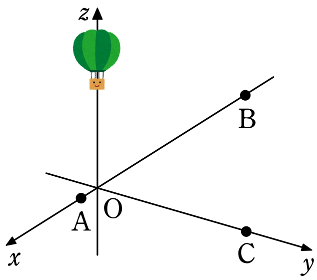
$$AB=\sqrt{AC^2+CD^2+DB^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例１） 平らな広場の地点 O を原点として，東の方向を x 軸の正の向き，北の方向を y 軸の正の向き，真上の方向を z 軸の正の向きとする座標空間を考える。また，1 m を 1 の長さとする。この広場の上空に気球 P が浮かんでいる。レーザー距離計で，次のように測定した。ただし，気球 P は 1 つの点とみなす。

[1] 地点 O から東へ 11 m 進んだ地点 A (11，0，0) から，P までの距離を測ると 61 m

[2] 地点 O から西へ 91 m 進んだ地点 B (−91，0，0) から，P までの距離を測ると 109 m

[3] 地点 O から北へ 221 m 進んだ地点 C (0，221，0) から，P までの距離を測ると 229 m



気球 P の位置を特定してみよう。

P の座標を $(x,\ y,\ z)$ とする。ただし，$z>0$ である。

AP＝61 であるから $\sqrt{(x-11)^2+y^2+z^2}=61$

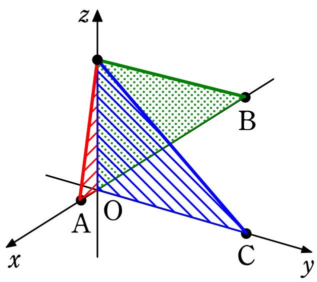
両辺を 2 乗すると $(x-11)^2+y^2+z^2=3721$ …… ①

BP＝109 であるから $\sqrt{(x+91)^2+y^2+z^2}=109$

両辺を 2 乗すると $(x+91)^2+y^2+z^2=11881$ …… ②

CP＝229 であるから $\sqrt{x^2+(y-221)^2+z^2}=229$

両辺を 2 乗すると $x^2+(y-221)^2+z^2=52441$ …… ③



連立方程式 ①，②，③ は解くことができ，

その解で $z>0$ を満たすものは $x=0,\ y=0,\ z=60$

よって，P の座標は (0，0，60) である。

気球 P の位置は，

地点 O から真上に 60 m 上がった位置である。㊣