

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】数学史やゲーム、パズルを通じて、数学と文化の関わりについての理解を深めよう

□ゲーム・パズルの中の数学

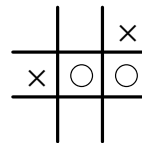
私たちの身近にあるゲームの中には、論理的に戦略を考え進めていくゲームも多い。また、パズルの中にも論理的に考えて解いていくものがある。ここでは、ゲームの中の数学、パズルの中の数学について調べてみよう。

○ゲームの中の数学

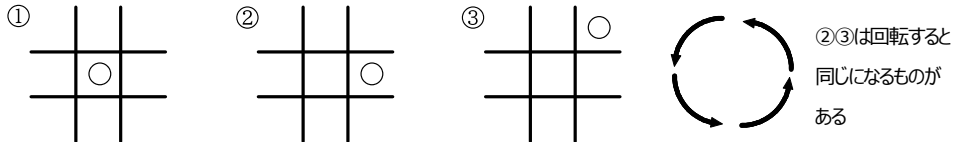
さまざまなゲームについて、ゲームを実際に行ってみて、どのようにすれば勝てるか、必ず勝てる方法はないか、ということ考察しよう

●三目並べ

右の図のように、縦2本、横2本の線を引き、線で分けられた9個の場所に順に○、×を書いて縦・横・斜めのいずれか1列に3個そろえた方の勝ちというゲームについて考えよう。

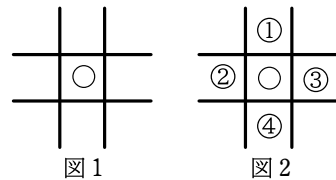


先に書く人を「先手」、後に書く人を「後手」と呼ぶことにする。先手が○を書き、後手が×を書く。先手の○の書く場所は、回転して同じになるような場所を除くと次の3通りである。



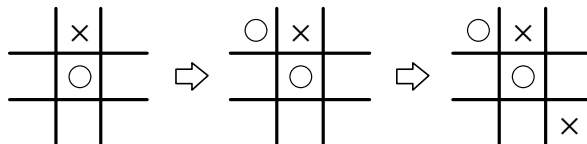
練習40) このゲームは先手、後手とも最善を尽くせば必ず引き分けになることが知られている。しかし、上の①の状態から、後手が次に書く場所によっては、その後、後手がどのようにしても先手が勝つ方法がある。そのような手順になるのは、後手が次に×をどこに書いたときか。まわりの人と相談・実験してみよう。

解答 下の図1の状態から後手が角以外のどれか(図2の①～④のうちどれか)に×を書いたとき、先手が必ず勝つ方法がある。

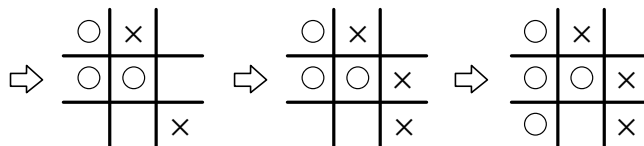


例えば、後手が図2の①の

位置に×を書いたとすると、先手は④以外の位置に○を書けば、必ず勝つ方法がある。



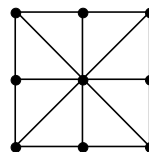
例えば、次のように勝つことができる。



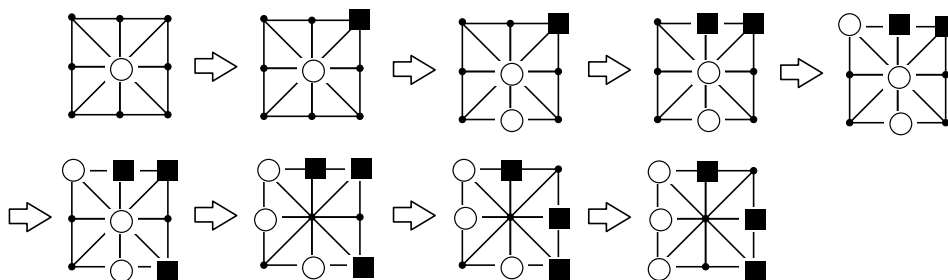
記号やコマを縦・横・斜めに1列並べるというゲームは世界各国にある。例えば、フィリピンのタパタンやケニアのシシマなどである。ここではフィリピンのタパタンについて考えてみよう。

【タパタンのルール】

- ・ 先手、後手のそれぞれが3個のコマを持つ。
- ・ 右の図のようなゲーム盤を用意し、順に格子点（図の黒点の箇所）にコマを置く。
- ・ 3個のコマを置き終えたら、順に、自分のコマを、線で結ばれた隣の格子点に動かす。
ただし、コマのある格子点には動かせない。
- ・ 自分のコマを縦・横・斜めのいずれか1列に3個並べた方が勝ち。



例えば、先手を○、後手を■として、次のようにゲームが進められる。



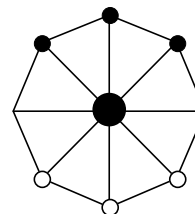
この場合は、先手の勝ちとなる。

練習 4 1) タパタンについて、先手、後手の必ず勝つ方法はあるだろうか。

いろいろなコマの打ち方や動かし方を調べて、考えてみよう。

【シシマのルール】

- ・ ●○を決め、コマを図のように置く。
- ・ 順に、自分のコマを線に沿って空いている点に動かす。
中央のシシマ（池：中央のマス）にも動かすことができる。
- ・ ただし、動かすとき、コマを飛び越えてはいけない。
- ・ 自分のコマを一直線上に並べた方が勝ち。

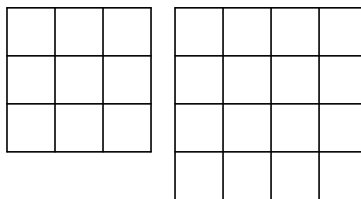


三目並べは世界各国にある。ゲームの設定やゲーム盤、コマのデザイン等に文化的な差異が見られるが、ルールには共通性が見られる。

□パズルの中の数学

右の図のような正方形のマスの中に自然数を入れて、各行、各列、2つの斜めの数の和をすべて等しくするというパズルを 魔方陣 という。

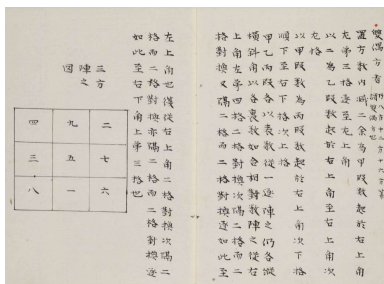
ここでは、 3×3 の魔方陣では 1 から 9 までの異なる自然数を、 4×4 の魔方陣では 1 から 16 までの異なる自然数を入れるものとする。



補足 紀元前2200年頃、中国の皇帝が洛水を下っていたときに亀が現れて、その亀の甲羅に図「亀の甲羅の文様」のような文様があったといわれている。これが魔方陣の始まりとされる。それ以来魔方陣は、魔除けに使われている。

魔方陣はヨーロッパに伝わり、さまざまな変形が生まれた。

日本では、江戸時代に魔方陣の研究が盛んになった。関孝和は『方陣円撰之法（ほうじんえんさんのほう）』（1683年）で、魔方陣の一般的解法を日本で初めて展開した。「方陣」「円撰」（円陣）「格」（方陣のます目）という用語も関孝和によるものである。



『方陣之法』(日本学士院所蔵)
出典: 国書データベース
<https://doi.org/10.20730/100318876>

○ 3×3 の魔方陣

3×3 の魔方陣では、マスは 9 個ある。右の図のように、マスに入る数を a, b, c, \dots, i とする。

a	b	c
d	e	f
g	h	i

[1] 等しい 3 個の数の和 S を求める。

9 個の数の和は $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$

縦の 3 列は和がすべて等しいから $S = 45 \div 3 = 15$

[2] 右の図の中央の数 e を求める。

$$(b + e + h) + (d + e + f) + (a + e + i) + (c + e + g) = (a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e$$

であるから、次の等式が成り立つ。

$$4S = 45 + 3e \quad \text{すなわち} \quad 4 \times 15 = 45 + 3e$$

よって $e = 5$

$$\begin{matrix} a+b+c, & d+e+f, & g+h+i, \\ a+d+g, & b+e+h, & c+f+i, \\ a+e+i, & c+e+g & \end{matrix} \text{がすべて } S$$

練習 4 2 (1) 1 を含む 3 個の数の和が 15 になる組は 2 組しかない。その 2 組を求めよ。

(2) 1 は四隅の 4 つのマスには入らない。その理由を説明せよ。

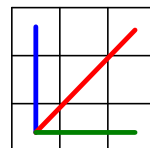
解答

(1) 1, 5, 9 と 1, 6, 8

(2) 四隅の数は、縦、横、斜めの和で 15 になる必要がある。

しかし、(1) により、1 を含む 3 個の数の和が 15 になる組は 2 組しかない。

したがって、1 は四隅には入らない。



[3] 1が入るマスを決める。

前ページの練習 42 により, 例えば, $b=1$ とすると,
 $h=9$ が決まる。

a	1	c
d	5	f
g	h	i

練習 43) (1) $b=1$ とした場合の魔方陣を完成させよ。

(2) [3] で $d=1$ とした場合の魔方陣を完成させよ。

【解答】 (1) 1を含む3個の数の和が15になる組は, 1, 5, 9以外には1, 6, 8しかない。

したがって, $a=6, c=8$ または $a=8, c=6$

残りの数は, 各行, 各列, 2つの斜めの数の和が15になるようにそれぞれのマスに入る数を決めると, 以下のようになる。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

【解答】 (2) (1) と同じように考えると

$a=6, g=8$ または $a=8, g=6$

残りの数を, 各行, 各列, 2つの斜めの数の和が15になるようにそれぞれのマスに入る数を決めると, 以下のようになる。

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

3×3の魔方陣はいくつかあるが, それらを回転したり, 裏返したりすると, どれも数の並びが一致する。
 すなわち, 次のことがいえる。

3×3の魔方陣は, 本質的にはただ1通りである。

○ 4×4 の魔方陣

4×4 の魔方陣では、マスは 16 個ある。

まず、等しい 4 個の数の和 S を求めてみよう。16 個の数の和は

$$1 + 2 + 3 + \dots + 16 = 136$$

縦の 4 列は和がすべて等しいから

$$S = 136 \div 4 = 34$$

例えば、右のような魔方陣がある。

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

この魔方陣では、各行、各列、2 つの斜め以外にも、和が 34 になる次のような 4 つの数があることがわかる。

- ① 四隅にある 4 つの数
- ② 中央の正方形内にある 4 つの数
- ③ 四隅の正方形内にある 4 つの数

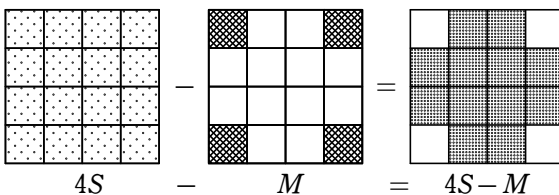
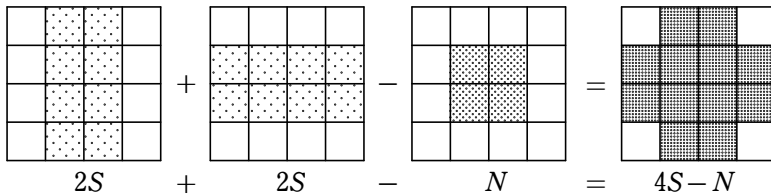
- ① $1 + 4 + 13 + 16 = 34$
- ② $7 + 6 + 11 + 10 = 34$
- ③ 左上： $1 + 14 + 12 + 7 = 34$ ，右上： $15 + 4 + 6 + 9 = 34$
 左下： $8 + 11 + 13 + 2 = 34$ ，右下： $10 + 5 + 3 + 16 = 34$
 いずれも 34 になっている。

①、② の和が、すべての魔方陣で 34 になるかを調べよう。

- ① 四隅にある 4 つの数
- ② 中央の正方形内にある 4 つの数

例 18・練習 45) 上の ① の和を M 、② の和を N 、 $S = 34$ とする。

図で色のついたマスの中の数の和に着目すると、 M 、 N 、 S には、次のような等式が成り立つ。



$$4S - N = 4S - M \text{ から}$$

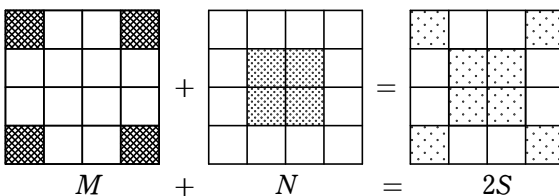
$$M = N$$

$$\text{また } M + N = 2S$$

よって、 $M = N = S$ となり、

① と ② の 4 つの数の和は

どのような魔方陣でも 34 になる。



終

4×4 の魔方陣では、各行、各列、2 つの斜めの数の和だけでなく、
 四隅にある数の和、中央の正方形の中の数の和も 34 である。

4×4の魔方陣において、

- ① 四隅にある4つの数 ② 中央の正方形内にある4つの数

の和はいずれも34になる。しかし、例えば、右の魔方陣において

7	2	16	9
12	15	1	6
5	14	4	11
10	3	13	8

- ③ 四隅の正方形内にある4つの数

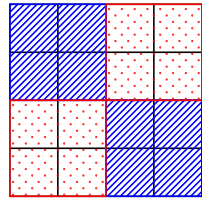
の和は34にはならない。

左上の4つの数の和 = $7 + 2 + 12 + 15 = 36$ ，右上の4つの数の和 = $16 + 9 + 1 + 6 = 32$

左下の4つの数の和 = $5 + 14 + 10 + 3 = 32$ ，右下の4つの数の和 = $4 + 11 + 13 + 8 = 36$

上の計算から、③の和は常に34にはならないが、次のことが予想できる。

- ④ $\left[\begin{array}{l} \text{左上の4つの数の和} = \text{右下の4つの数の和} \\ \text{右上の4つの数の和} = \text{左下の4つの数の和} \end{array} \right.$



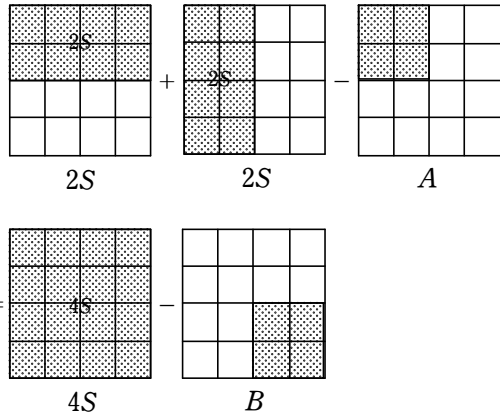
練習47) 4×4の魔方陣では、④がいえることを、図をかくなどして説明せよ。

【解答】

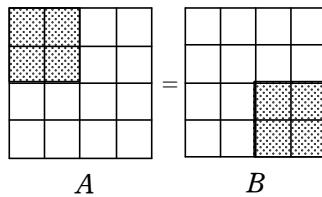
左上の4つの数の和を A ，
右下の4つの数の和を B ，
各行、各列、2つの斜めの和を

S ($S=34$) とする。

A 、 B 、 S には次のような等式が成り立つ。



よって



【注意】「右上の4つの数の和 = 左下の4つの数の和」についても同様。

魔方陣は、5×5や6×6、9×9、3のべき乗のものも考えられる。

(2024年に幕別町出身の美濃英俊・元山梨大教授(名古屋大学・同大学院卒)がクラウドサービスが提供する多数のGPUを利用して確定が不可能と言われた「6×6」の解について「1775京3889兆1976億6063万5632通り」と世界で初めて特定した)

また、教科書では、異なる自然数を使った魔方陣を考えたが、使う数を限定したものもある。右の魔方陣は、素数だけを使ったものである。完全方阵や多重魔方陣など他にも色々あるので興味があれば調べてみよう。

17	113	47
89	59	29
71	5	101