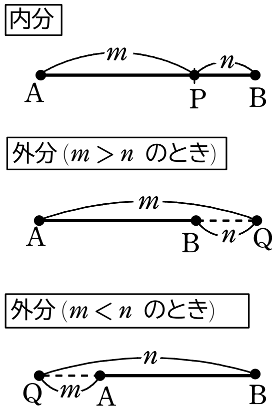
図形の性質【三角形の辺の比】p.82～84

青チャートA：例題 70～72

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】辺の比率のルールを知ろう

○内分・外分



m，n を正の数とする。

線分 AB 上の点 P が　AP：PB＝m：n

を満たすとき，点 P は線分 AB を m：n に **内分する** という。

線分の内側で分ける（点）

次に，m，n を<u>異なる</u>正の数とする。

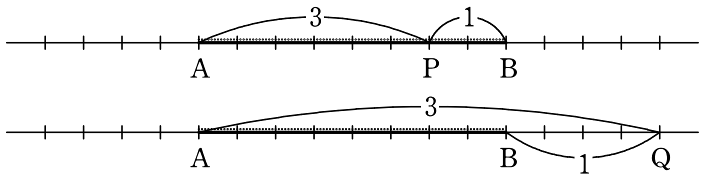
線分 AB の延長上の点 Q が AQ：QB＝m：n

を満たすとき，点 Q は線分 AB を m：n に **外分する** という。

線分の外側で分ける（点）

練習１） 線分 AB を 3：1 に内分する点 P と，

線分 AB を 3：1 に外分する点Q を下の図にしるせ。



ABの目盛りは 8 目盛り

●内分のとき⇒比率を足して割る

3＋1＝4　なので　8÷4＝2

3：1 を 2 倍して

6：2 となる目盛り上の点を探す

これを比率の単位とする

ABの目盛りは 8 目盛り

●外分のとき⇒比率を引いて割る

3－1＝2　なので　8÷2＝4

3：1 を 4 倍して

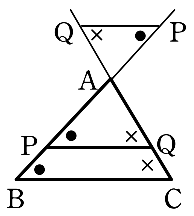
12：4 となる目盛り上の点を探す

これを比率の単位とする

○三角形の角の二等分線と比

△ABC の辺 AB，AC 上に，それぞれ点 P，Q があるとき，

次のことが成り立つ。ただし，３の逆は成り立たない。



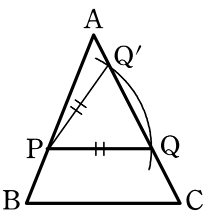
1	PQ∥BC	$\Longleftrightarrow$	AP：AB＝AQ：AC
2	PQ∥BC	$\Longleftrightarrow$	AP：PB＝AQ：QC
3	PQ∥BC	$\Longrightarrow$	AP：AB＝PQ：BC

三角形の１つの平行な直線は 他の２つの辺を同じ比に内分または外分する

【注意】「p ならば q」を $p \Longrightarrow q$，「p ならば q かつ q ならば p」を $p \Longleftrightarrow q$ と書く。

証明は相似を用いて導かれる

深める　上の３の逆が成り立たないことを，右の図を使って説明しよう。



PQ′＝PQ を満たす Q と異なる点 Q′ がとれれば，

AP：AB＝ PQ′：BC

であるが，PQ′ と BC は平行ではない。

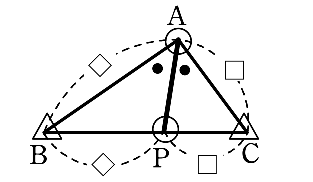
図形の性質【三角形の辺の比】 p.82～84

青チャートA: 例題 70～72

三角形の角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ。

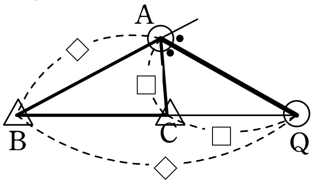
三角形の内角の二等分線と比

定理１　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BCとの交点 P は，辺 BCを AB：AC に内分する。



三角形の外角の二等分線と比

定理２　AB≠AC である △ABC の頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点 Q は，辺 BCを AB：AC に外分する。



深める

AB≠ACである理由を考えよう

内角，外角どちらも，　△ **から** △ **まで行くときに，**

二等分線の両端 ○ のどちらを通っても（遠回りしても，近道しても）同じ比率

$\overset{△○}{\mathrm{BA}} : \overset{○△}{\mathrm{AC}} = \overset{△○}{\mathrm{BD}} : \overset{○△}{\mathrm{DC}} = ◇ : □$

【内角の二等分線の証明】

点 C を通り直線 AP に平行な直線を引き，辺 AB の A を越える延長との交点を D とすると，AP∥DC から

∠BAP＝∠ADC，∠PAC＝∠ACD

一方，∠BAP＝∠PAC であるから

∠ADC＝∠ACD

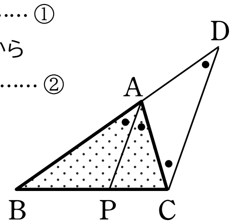
よって　　AD＝AC　……①

また，AP∥DC であるから

BP：PC＝BA：AD　……②

①，②より

BP：PC＝AB：AC



【逆の証明】（同一法による）

△ABC において，辺 BC を AB：AC に内分する点を P とする。また，∠A の二等分線と辺 BC との交点を P′ とする。このとき定理１により

BP′：P′C＝AB：AC＝BP：PC

P，P′ はともに辺 BC を AB：AC に内分する点であるから，P と P′ は一致する。よって，AP は ∠A を２等分する

（同一法とは「性質Ａをもつ ⇒ 性質Ｂをもつ」が正しいとき，もし性質Ｂをもつものがただ一つしかないならば，「性質Ｂをもつものは必ず性質Ａをもつ」という命題も正しいという間接証明法の一つ。他に平行線の比から錯角・同位角や面積比を利用した証明もある）

【外角の二等分線の証明】

辺 BA の A を越える延長上に点 F をとると，AQ∥EC から

∠ACE＝∠CAQ

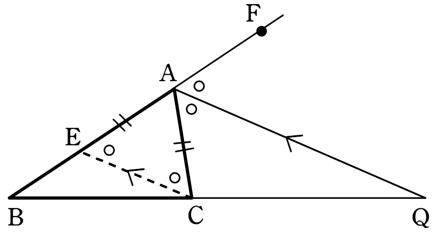
∠AEC＝∠FAQ＝∠CAQ

ゆえに，∠ACE＝∠AEC から

AE＝AC

AQ∥EC であるから　　BQ：QC＝BA：AE

ゆえに　　BQ：QC＝AB：AC



【逆の証明】（同一法による）

△ABC において，辺 BC を AB：AC に外分する点を Q とする。また，∠A の外角の二等分線と辺 BC との交点を Q′ とする。このとき定理２により

BQ′：Q′C＝AB：AC＝BQ：QC

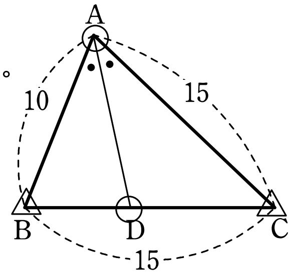
Q，Q′ はともに辺 BC を AB：AC に外分する点であるから，Q と Q′ は一致する。よって，AQ は ∠A を２等分する

（他に平行線の比から錯角・同位角や面積比を利用した証明もある）

図形の性質【三角形の辺の比】p.82～84

青チャートA: 例題 70～72

練習３） AB＝10，BC＝15，CA＝15 である △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC と交点を D とする。線分 BD の長さを求めよ。



解答

AD は ∠A の二等分線であるから

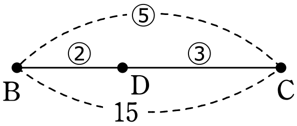
$$\overset{\triangle\circ}{\mathrm{BD}} : \overset{\circ\triangle}{\mathrm{DC}} = \overset{\triangle\circ}{\mathrm{BA}} : \overset{\circ\triangle}{\mathrm{AC}} = 10 : 15 = 2 : 3$$

よって，線分 BD の長さは

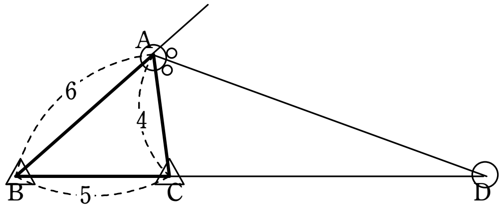
$$\mathrm{BD} = \frac{2}{2+3}\mathrm{BC} = \frac{2}{5}\cdot 15 = 6$$

BD は BC を 5 つに分けたうちの 2 つ分

比率には共通する記号を付けて長さと区別をすると良い



練習４） AB＝6，BC＝5，CA＝4 である △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とする。線分 CD の長さを求めよ。



解答 AD は頂点 A における外角の二等分線であるから

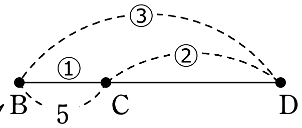
$$\overset{\triangle\circ}{\mathrm{BD}} : \overset{\circ\triangle}{\mathrm{CD}} = \overset{\triangle\circ}{\mathrm{BA}} : \overset{\circ\triangle}{\mathrm{AC}} = 6 : 4 = 3 : 2$$

すなわち　$(5+\mathrm{CD}) : \mathrm{CD} = 3 : 2$

よって　$2(5+\mathrm{CD}) = 3\mathrm{CD}$

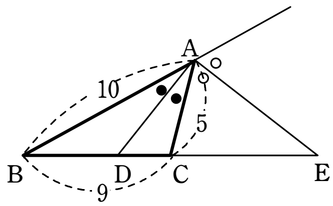
これを解いて　$\mathrm{CD} = 10$

BD は BC の 3 つ分
CD は BC の 2 つ分



問題） AB＝10，BC＝9，CA＝5 である △ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とし，頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。次の線分の長さを求めよ。

(1) BD　　(2) DE



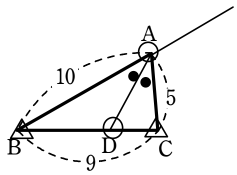
解答 (1) AD は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

すなわち　$10 : 5 = \mathrm{BD} : (9-\mathrm{BD})$

よって　$10(9-\mathrm{BD}) = 5\mathrm{BD}$

これを解いて　$\mathrm{BD} = 6$



(2) AE は頂点 A における外角の二等分線であるから

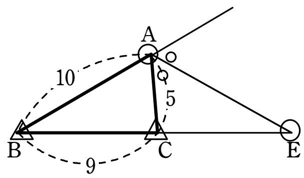
$$\mathrm{BA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BE} : \mathrm{EC}$$

すなわち　$10 : 5 = \mathrm{BE} : (\mathrm{BE}-9)$

よって　$10(\mathrm{BE}-9) = 5\mathrm{BE}$

これを解いて　$\mathrm{BE} = 18$

したがって　$\mathrm{DE} = \mathrm{BE} - \mathrm{BD} = 18 - 6 = 12$



※ 分かったことは書き加えていこう