

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】五心の性質を使いこなそう

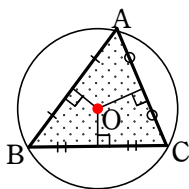
□外心 (circumcenter)

三角形の辺の垂直二等分線

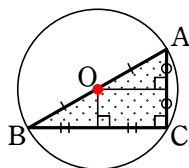
定理 3 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

定理 3 より、点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって、点 O を中心として、3 つの頂点を通る円が存在する。この円を三角形の **外接円** といい、外接円の中心 O を **外心** という。三角形の外心は、**3 辺の垂直二等分線が交わる点** である。鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形の外心 O は、それぞれ下の図のような位置にある。

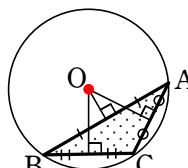
三角形の内部



斜辺の中点

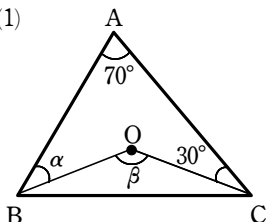


三角形の外部

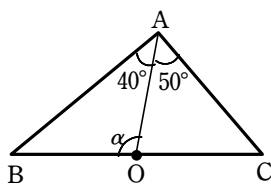


練習 5 改) 下の図において、点 O は  $\triangle ABC$  の外心である。 $\alpha$  を求めよ。

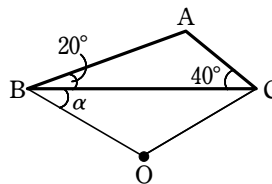
(1)



(2)

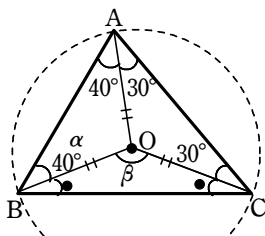


(3)



解答

外心から各頂点への線を加えて、二等辺三角形を見つけよう。外接円を書き足すことも大事。



(1) 点 O は  $\triangle ABC$  の外心であるから

$$OA = OB = OC$$

よって、 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OCA$  は二等辺三角形である。

ゆえに  $\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$

$$\angle OAB = 70^\circ - \angle OAC = 40^\circ$$

$\alpha = \angle OAB$  であるから  $\alpha = 40^\circ$

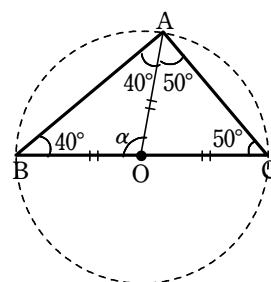
$\triangle ABC$  の内角の和は  $180^\circ$  であるから

$$70^\circ + 40^\circ + 30^\circ + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ \text{ よって } \angle OBC + \angle OCB = 40^\circ$$

$\triangle OBC$  の内角の和も  $180^\circ$  であるから  $\beta = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

別解 (後半)  $\triangle ABC$  は点 O を中心とし、半径 OA の円に内接する。

よって、円周角の定理により  $\beta = 2\angle BAC = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$



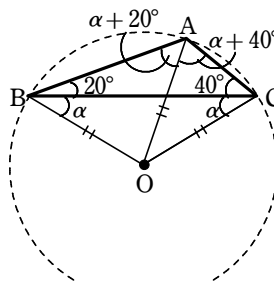
(2)  $OA = OB$  であるから、

$\triangle OAB$  は二等辺三角形である。

よって

$$\angle OBA = \angle OAB = 40^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ$$



(3)  $OA = OB = OC$  であるから

$\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCA$

はいずれも二等辺三角形である。

よって角の大きさは図のようになり

$$(\alpha + 20^\circ) + 20^\circ + 40^\circ + (\alpha + 40^\circ) = 180^\circ$$

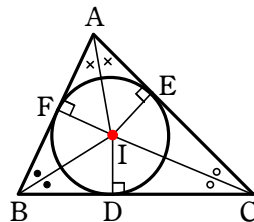
$$2\alpha = 60^\circ \text{ したがって } \alpha = 30^\circ$$

□**三角形の内心 (incenter)** 三角形の内角の二等分線

定理 4 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

定理 4 から,  $ID = IE = IF$  である。

よって, 点 I を中心として,  $\triangle ABC$  の3辺に点 D, E, F で接する円が存在する。この円を三角形の **内接円** といい, 内接円の中心 I を **内心** という。

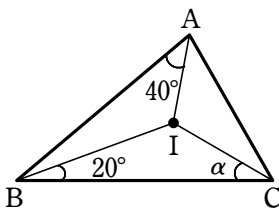


**三角形の内心は, 3つの内角の二等分線が交わる点である。**

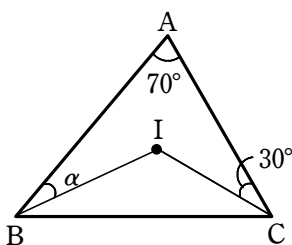


**練習 7)** 下の図において, 点 I は  $\triangle ABC$  の内心である。 $\alpha$  を求めよ。

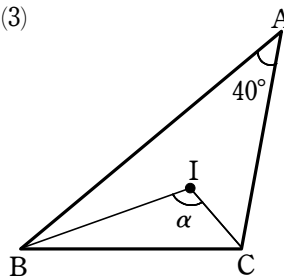
(1)



(2)

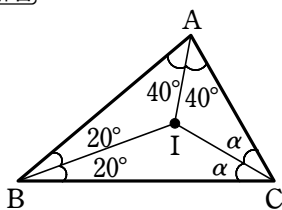


(3)

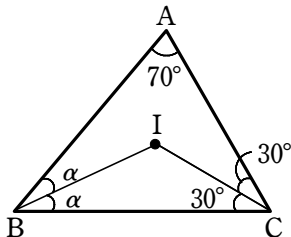


内心から各頂点への線 (角の二等分線) を用いて、同じ角を見つけよう

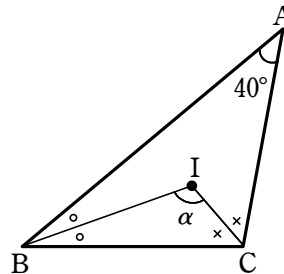
**解答**



(1)  $\angle IAC = \angle IAB = 40^\circ$   
 $\angle IBA = \angle IBC = 20^\circ$   
 $\angle ICA = \angle ICB = \alpha$   
 よって,  $\triangle ABC$  において  
 $2 \times 40^\circ + 2 \times 20^\circ + 2\alpha = 180^\circ$   
 これを解いて  $\alpha = 30^\circ$



(2)  $\angle IBC = \angle IBA = \alpha$   
 $\angle ICB = \angle ICA = 30^\circ$   
 よって,  $\triangle ABC$  において  
 $2\alpha + 2 \times 30^\circ + 70^\circ = 180^\circ$   
 これを解いて  $\alpha = 25^\circ$



(3)  $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 40^\circ$   
 $\circ \circ \quad \times \times = 140^\circ$   
 $\angle IBA = \angle IBC, \angle ICA = \angle ICB$   
 であるから  $\angle IBC + \angle ICB$   
 $= \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB)$   
 $= \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$   
 よって  $\alpha = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

$\circ \circ + \times \times = 140^\circ$  なので  
 $\circ + \times = 70^\circ$   
 $\alpha + \circ + \times = 180^\circ$  より  $\alpha = 110^\circ$

□三角形の傍心 (excenter)

練習6)  $\triangle ABC$  において、頂点 B における外角の二等分線と頂点 C における外角の二等分線の交点を I とする。I

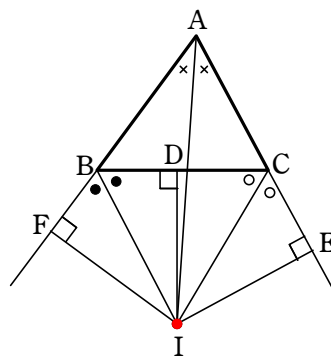
は  $\angle A$  の二等分線上にあることを証明せよ。

【解答】 I から辺 BC, CA, AB またはその延長に、それぞれ垂線 ID, IE, IF を下ろす。

このとき  $ID = IE, ID = IF$

よって  $IE = IF$

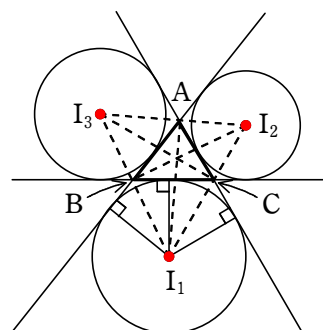
ゆえに、I は  $\angle A$  の二等分線上にある。



練習6で証明したように、三角形の1つの頂点における内角の二等分線と、他の2つの頂点における外角の二等分線は1点で交わる。

$\triangle ABC$  において、この交点は3つの頂角  $\angle A, \angle B, \angle C$  の内部に1つずつある。これらを、それぞれ  $I_1, I_2, I_3$  とする。

$I_1$  を中心とし、 $I_1$  から BC に下ろした垂線を半径とする円は、辺 BC および辺 AB, AC の延長に接する。この円を頂角  $\angle A$  の内部の傍接円、 $I_1$  を傍心という。 $I_2, I_3$  はそれぞれ頂角  $\angle B, \angle C$  の内部の傍心である。



【補足】 傍接円と内接円に関連する定理として「フイエルバッハの定理：九点円は内接円に内接し、傍接円に外接する」と言う平面幾何学の中で最も美しい定理の一つと評価されているものがある。(青チャートp.497参照)



(九点円：三角形の3辺の midpoint, 3頂点から対辺に下ろした垂線の足, 垂心と3頂点の midpoint を通る円のこと。オイラー円やフイエルバッハ円などとも呼ばれる)

□三角形の重心 (幾何中心 geometric center, centroid)

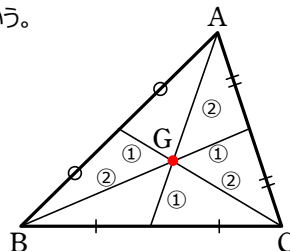
⇔ (重心 center of gravity, 質量重心 center of mass)

三角形の頂点とそれに向かい合う辺の midpoint を結ぶ線分を 中線 という。

三角形の中線

定理5 三角形の3つの中線は1点で交わり、その点は各中線を 2 : 1 に内分する。

三角形の3つの中線が交わる点を、三角形の 重心 という。



例題) 右の図において、点 G は△ABC の重心である。

次の線分の長さを求めよ。

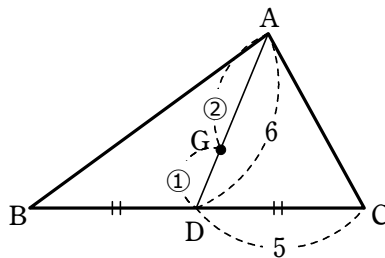
(1) BD

(2) AG

BD = DC = 5

AG : GD = 2 : 1 より

$$AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

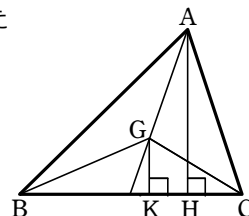


練習 8) △ABC の重心を G とし、2 点 A, G から直線 BC に下ろした

垂線を、それぞれ AH, GK とする。

(1) AH : GK を求めよ。

(2) 面積比 △ABC : △GBC を求めよ。



解答

(1) 辺 BC の中点を M とする。

AH // GK であるから

相似からでもよい

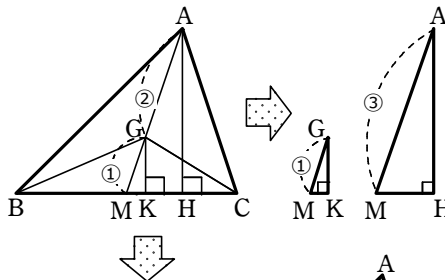
$$AH : GK = AM : GM$$

G は △ABC の重心であるから

$$AG : GM = 2 : 1$$

よって AM : GM = 3 : 1

ゆえに AH : GK = 3 : 1



(2) △ABC と △GBC において、

辺 BC を共通の底辺とみると、

面積比は高さの比に等しい。

高さはそれぞれ AH, GK である。

したがって、面積比 △ABC : △GBC は

高さの比 AH : GK に等しく

$$\triangle ABC : \triangle GBC = 3 : 1$$

$$\triangle GBC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot GK$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

底辺が等しい三角形の  
面積比は高さの比に等しい  
高さが等しい三角形の  
面積比は底辺の比に等しい

別解 △ABC : △GBC

$$= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH : \frac{1}{2} \cdot BC \cdot GK$$

$$= AH : GK = 3 : 1$$

三角形の辺の垂直二等分線

定理3 三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。

【定理3の証明】△ABCにおいて、

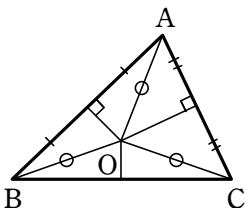
辺ABの垂直二等分線と辺ACの垂直二等分線の交点をOとすると

$$OA = OB, OA = OC$$

よって、 $OB = OC$  となるから、

Oは辺BCの垂直二等分線上にもある。

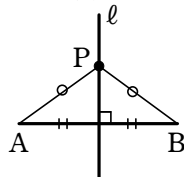
したがって、三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。 図



線分ABの垂直二等分線ℓと点Pについて、次が成り立つ。

点Pがℓ上にある

$$\iff PA = PB$$



三角形の内角の二等分線

定理4 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

【定理4の証明】△ABCにおいて、∠B

の二等分線と∠Cの二等分線の交点をIとし、Iから辺BC, CA,

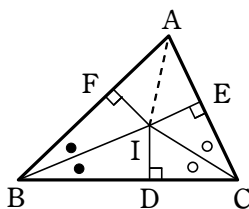
ABに下ろした垂線を、それぞれ

ID, IE, IFとすると

$$IF = ID, IE = ID$$

よって、 $IF = IE$  となるから、Iは∠Aの二等分線上にもある。

したがって、三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。 図

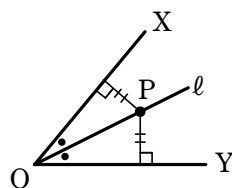


∠XOYの二等分線ℓと

点Pについて、次が成り立つ。

点Pがℓ上にある

$$\iff \text{点Pが2辺OX, OYから等距離にある}$$



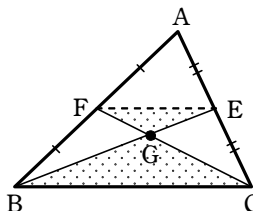
三角形の中線

定理5 三角形の3本の中線は1点で交わり、その点は各中線を2:1に内分する。

【定理5の証明】△ABCの中線BEと中線CFの交点をGとする。

また、中線ADと中線BEの交点をG'とする。

このとき、まず2点G, G'が一致することを示す。



中点連結定理により  $FE \parallel BC, BC : FE = 2 : 1$

となるから  $BG : GE = BC : FE = 2 : 1$

よって、点Gは線分BEを2:1に内分する。

同様に  $BG' : G'E = AB : ED = 2 : 1$

よって、点G'は線分BEを2:1に内分する。

線分BEを2:1に内分する点は

1点だけであるから、2点G, G'は一致する。

したがって、3本の中線は点Gで交わる。

また、 $AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$  であるから、

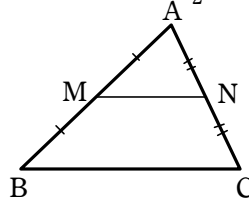
3本の中線が交わる点は各中線を2:1に内分する。 図

平行線と線分の比

中点連結定理

△ABCにおいて、辺ABの中点をM, 辺ACの中点をNとすると、

$$MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2} BC$$



【別解】△ABCの中線BM, CNの交点をGとし、AGと辺BCの交点をLとする。AG = GHとなる点Hをとり、中点連結定理からGM∥HC, GN∥BHなので四角形BHCGは平行四角形である。そこからALもGを通る中線であり2:1に内分することを示す。

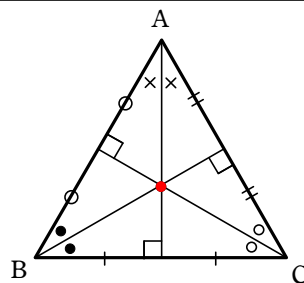
【補足】三角形の五心の存在の証明は、いずれもチェバの定理の逆を用いても証明ができる(教科書p.95, チャートp.471)。(垂心の証明については、三角比の話も含むため注意が必要)

□正三角形の重心、外心、内心

△ABC が正三角形であるとき、頂点 A と辺 BC の中点 M を結んでできる中線 AM は、辺 BC の垂直二等分線であり、また、∠A の二等分線でもある。

したがって、**正三角形の重心、外心、内心は一致する。**

(正三角形は内心、外心、垂心、重心が全て一点に集まっている唯一の三角形であり、どれか 2 つが一致する三角形は正三角形である)



応用例題 1)

仮定

結論

「重心と外心が一致する三角形」は、「正三角形」である。このことを証明せよ。

【解説】 三角形が正三角形であることを示すには、3 辺が等しいこと、または 3 つの角が等しいことを示せばよい。下の証明では、△ABC において  $AB = BC = CA$  であることを示している。

【証明】 △ABC の重心と外心が、点 O で一致したとする。

AO と BC の交点を M とすると、O は重心であるから

$$BM = CM$$

ここで、O は外心であるから、O は辺 BC の垂直二等分線上にある。

M は辺 BC の中点であるから

$$OM \perp BC$$

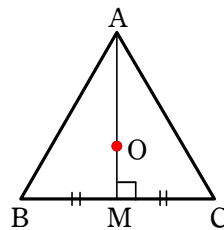
よって、AM は辺 BC の垂直二等分線であり

$$AB = AC \quad \dots\dots ①$$

同様にして  $BA = BC \quad \dots\dots ②$

$$①, ② \text{ から } AB = BC = CA$$

ゆえに、重心と外心が一致する三角形は、正三角形である。【終】



練習 9) 重心と内心が一致する三角形は、正三角形である。このことを証明せよ。

【証明】

△ABC の重心と内心が、点 G で一致したとする。

AG と BC の交点を M とすると、G は重心であるから

$$BM = CM$$

ここで、G は内心であるから、AG は ∠BAC の二等分線である。

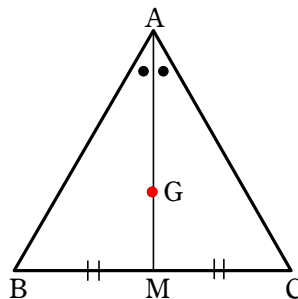
$$\text{よって } AB : AC = BM : MC = 1 : 1$$

$$\text{ゆえに } AB = AC \quad \dots\dots ①$$

$$\text{同様にして } BA = BC \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ から } AB = BC = CA$$

ゆえに、重心と内心が一致する三角形は、正三角形である。

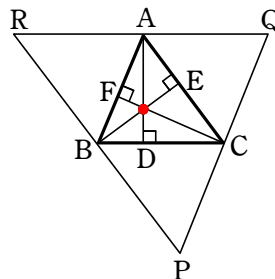


□三角形の垂心

三角形について、次の定理が成り立つ。

定理 三角形の3つの頂点から、向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は1点で交わる。

【証明】  $\triangle ABC$  の3つの頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした3本の垂線を  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  とする。  
 また、 $\triangle ABC$  の3つの頂点を通り、それぞれの向かい合う辺に平行な直線の交点を、右の図のように  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とする。  
 このとき、四角形  $ABCQ$ ,  $ACBR$  は、2組の向かい合う辺がそれぞれ平行であるから、ともに平行四辺形である。



よって  $AQ = BC$ ,  $RA = BC$

ゆえに  $AQ = RA$

また、 $AD \perp BC$ ,  $RQ \parallel BC$  であるから

$AD \perp RQ$

よって、 $AD$  は  $\triangle PQR$  の辺  $QR$  の垂直二等分線である。

同様に、 $BE$  は辺  $RP$  の、 $CF$  は辺  $PQ$  の垂直二等分線であるから、

$AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  は、 $\triangle PQR$  の外心において1点で交わる。 終

【深める】 鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形それぞれにおいて、垂心はどこに存在するか考えてみよう。

三角形の3つの頂点から、向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線が交わる点を、三角形の**垂心**という。

三角形の**外心**, **内心**, **重心**, **垂心**, **傍心**を **三角形の五心** という。

※ それぞれの性質を別紙のまとめのプリントで確認しよう。

**練習 1)** 内心と垂心が一致する三角形は、正三角形である。このことを証明せよ。

【証明】  $\triangle ABC$  の内心と垂心が、点  $O$  で一致したとする。

$AO$  と  $BC$  の交点を  $D$  とすると、 $O$  は内心であるから

$$\angle BAD = \angle CAD$$

また、 $O$  は垂心であるから  $AD \perp BC$

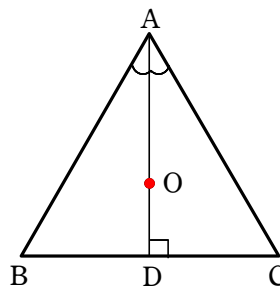
よって、 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$  であるから

$$AB = AC \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

同様にして  $BA = BC \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  から  $AB = BC = CA$

ゆえに、内心と垂心が一致する三角形は、正三角形である。



練習)  $\triangle ABC$  の辺  $AB$  の中点を  $D$ , 辺  $CA$  の中点を  $E$  とし, 重心を  $G$  とする。次の面積比を求めよ。

- (1)  $\triangle GED : \triangle GDB$
- (2) 四角形  $ADGE : \triangle ABC$

解答

- (1)  $G$  は  $\triangle ABC$  の重心であるから  $GE : GB = 1 : 2$   
 $\triangle GED$  と  $\triangle GDB$  は底辺をそれぞれ  $GE, GB$  とすると,  
 高さが等しいから

$$\triangle GED : \triangle GDB = GE : GB = 1 : 2$$

- (2)  $\triangle GED$  の面積を  $S$  とする。

$AD = DB$  であるから

$$\triangle ADE = \triangle BED$$

- (1) より  $\triangle BED = 3\triangle GED = 3S$  であるから

$$\triangle ADE = 3S$$

よって

$$\begin{aligned} (\text{四角形 } ADGE) &= \triangle ADE + \triangle GED \\ &= 3S + S = 4S \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

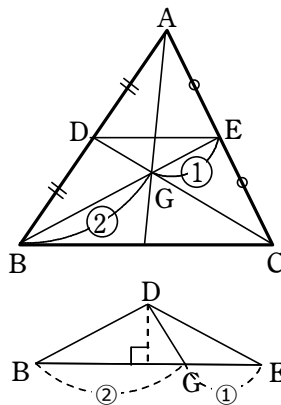
また  $\triangle ABE = \triangle CBE = 6S$

$\triangle ABC = 2\triangle ABE$  であるから

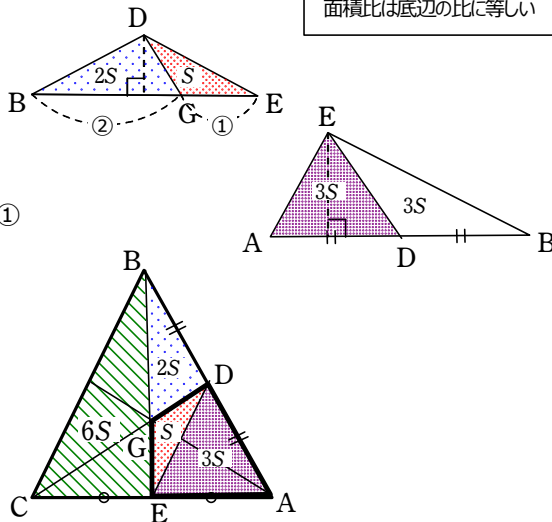
$$\triangle ABC = 2 \times 6S = 12S \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② から

$$\begin{aligned} \text{四角形 } ADGE : \triangle ABC &= 4S : 12S \\ &= 1 : 3 \end{aligned}$$



底辺が等しい三角形の面積比は高さの比に等しい  
 高さが等しい三角形の面積比は底辺の比に等しい



補足 三角形の面積比

高さが等しい

面積比は底辺の比と等しい

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle ABC} = \frac{CD}{BC}$$

底辺が等しい

面積比は高さの比と等しい

$$\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC} = \frac{PD}{AD}, \quad \frac{\triangle PBC}{\triangle ABC} = \frac{PD}{AD}$$

角が等しい

面積比は挟む辺の積の比と等しい

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$$