図形の性質【チェバの定理、メネラウスの定理】 p.91～95

青チャートA: 例題 82～85

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

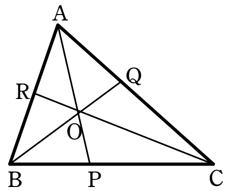
【内容目標】規則性に注目して使いこなそう

□チェバの定理

ジョバンニ・チェバ 1647～1734　イタリアの数学者

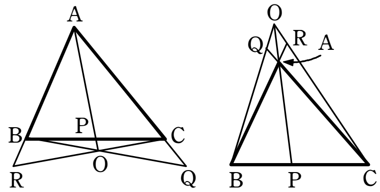
定理 6　△ABC の頂点 A, B, C と, 三角形の内部の点 O を結ぶ直線 AO, BO, CO が, 辺 BC, CA, AB と, それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



定理 6′　△ABC の辺上にもその延長上にもない点 O がある。頂点 A, B, C と O を結ぶ直線 AO, BO, CO が, 向かい合う辺 BC, CA, AB またはその延長と, それぞれ点 P, Q, R で交わるとき, 次の等式が成り立つ。

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



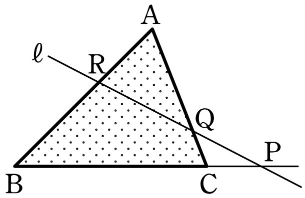
□メネラウスの定理

アレクサンドリアのメネラウス 70～140ごろ 古代ギリシアの数学者・天文学者

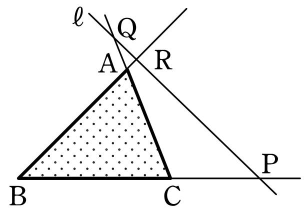
定理 7　△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，
三角形の頂点を通らない 1 つの直線 ℓ と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

P が BC の延長上にある場合

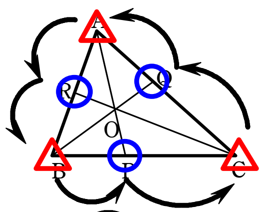


P, Q, R すべてが 3 辺の延長上にある場合



【解き方･考え方の注意点】

1．三角形の頂点を△，各辺（延長上も含め）の点を○とすると，
チェバの定理もメネラウスの定理もどちらも　次のように△と○を順繰り巡っていくことになる。（どの△から始めてもかまわないし，逆回りでもＯＫ）

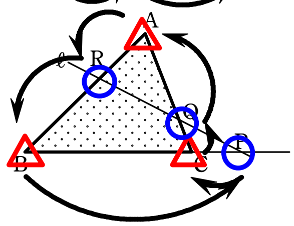


2．分数同士は掛け算でつながっていること。

3．「＝１」を忘れずに付けること。

4．アルファベットが左上の分子から右下の分母までしりとりになっていることにも注意しよう。

$$\overset{\triangle\bigcirc}{\frac{BP}{\underset{\bigcirc\triangle}{PC}}}\cdot\overset{\triangle\bigcirc}{\frac{CQ}{\underset{\bigcirc\triangle}{QA}}}\cdot\overset{\triangle\bigcirc}{\frac{AR}{\underset{\bigcirc\triangle}{RB}}}=1$$

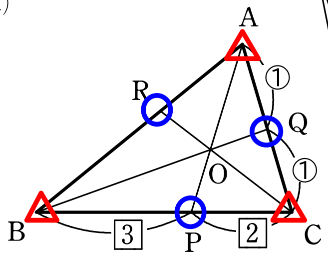


練習１０）△ABC において，点 P，Q が辺 BC，CA を図のような比に内分するとき，

図中の点 R に対して，AR：RB を求めよ。

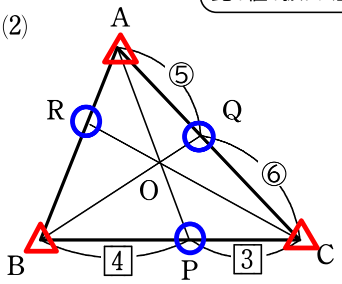
比の値の扱いに注意を

(1)



一般にこの式なら
A と B が△
R が○になる
※例外もあるので注意

(2)



解答

(1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

すなわち　$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=1$

求める比のペアから
始めるとスタートで
迷いづらい

$\frac{AR}{RB}=\frac{2}{3}$ より　　逆数を掛ける

AR：RB＝2：3　　横に倒す

(2) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

すなわち　$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}=1$

$\frac{AR}{RB}=\frac{5}{8}$ より　　逆数を掛ける

AR：RB＝5：8　　横に倒す

練習１１）△ABC の辺 BC を 2：1 に外分する点を P，辺 AB を 1：2 に内分する点を R とする。直線 PR と辺 CA の交点を Q とする。

(1) CQ：QA を求めよ。　　(2) PQ：QR を求めよ。

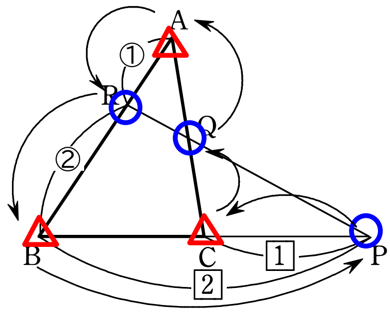
解答

(1) △ABC と直線 PR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}=1$$

すなわち　$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$

$\frac{CQ}{QA}=1$ より　　CQ：QA＝1：1



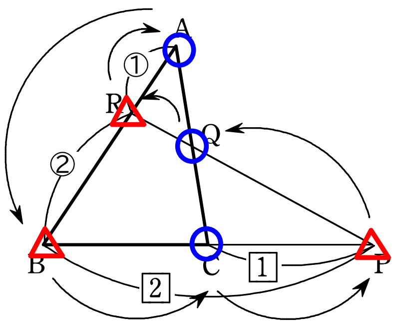
(2) △PRB と直線 AC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{RA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}=1$$

すなわち　$\frac{PQ}{QR}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$

PQ：QRより
PとR が頂点となる
三角形を考える

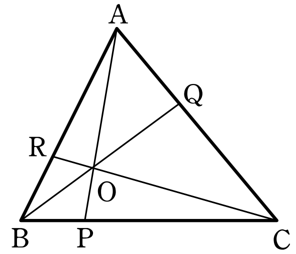
$\frac{PQ}{QR}=3$ より　　PQ：QR＝3：1

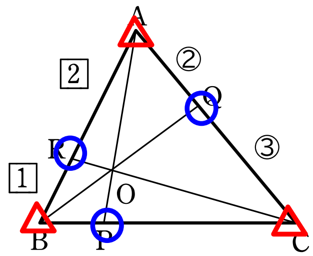


例題２）　△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を R，辺 AC を 2：3 に内分する点を Q とする。線分 BQ と線分 CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とする。

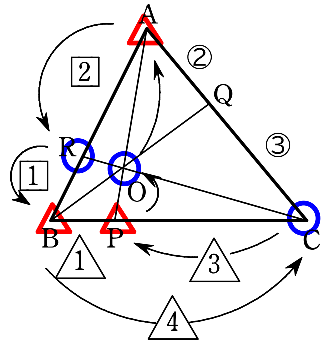
(1)　BP：PC を求めよ。

(2)　PO：OA を求めよ。





３頂点からの直線が
１点に交わるなら「チェバ」
三角形と直線（３点が
直線上）なら「メネラウス」



(1)　△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

すなわち　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$

$\frac{BP}{PC}=\frac{1}{3}$ より

BP：PC＝1：3

(2)　(1) より　　BC：CP＝4：3

よって，△ABP と直線 RC に

メネラウスの定理を用いると

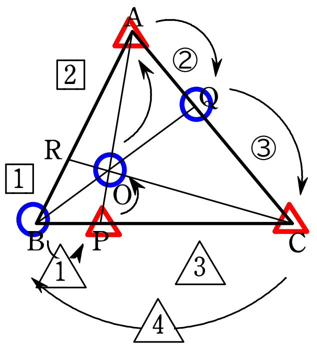
$$\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BC}{CP}=1$$

すなわち　$\frac{PO}{OA}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=1$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{8}$ より

PO：OA＝3：8

深める　例題 2 (2) を，△ACP と直線 BQ にメネラウスの定理を用いて求めてみよう。



(1) より　　CB：BP＝4：1

よって，△ACP と直線 BQ に

メネラウスの定理を用いると

$$\frac{PO}{OA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CB}{BP}=1$$

すなわち　$\frac{PO}{OA}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{1}=1$

$\frac{PO}{OA}=\frac{3}{8}$ より

PO：OA＝3：8

図形の性質【チェバの定理、メネラウスの定理】p.91～95

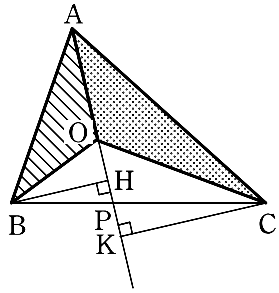
青チャートA: 例題 82～85

○チェバの定理の証明

右の図のように，辺 OA を共有する △OAB，△OCA がある。

直線 AO と線分 BC の交点を P とし，2 点 B，C から

直線 AO に下ろした垂線を，それぞれ BH，CK とすると



$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}=\frac{BH}{CK}$$

BH∥CK より，$\frac{BH}{CK}=\frac{BP}{PC}$ であるから

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}=\frac{BP}{PC}$$

よって

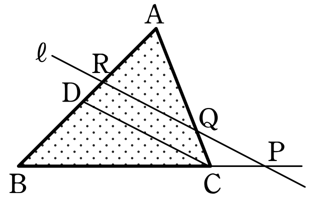
$$\frac{BP}{PC}=\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{\triangle OBC}{\triangle OAB},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{\triangle OCA}{\triangle OBC}$$

よって　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle OAB}{\triangle OCA}\cdot\frac{\triangle OBC}{\triangle OAB}\cdot\frac{\triangle OCA}{\triangle OBC}=1$　㊇

○メネラウスの定理の証明

頂点 C を通り，直線 ℓ に平行な直線を引き，

直線 AB との交点を D とする。



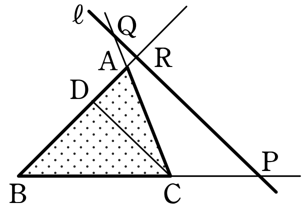
PR∥CD，QR∥CD であるから

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RD},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{DR}{RA}$$

よって　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　㊇

頂点 C を通り，直線 ℓ に平行な直線を引き，

直線 AB との交点を D とする。



PR∥CD，QR∥CD であるから

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RD},\quad \frac{CQ}{QA}=\frac{DR}{RA}$$

よって　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

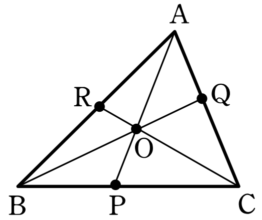
図形の性質【チェバの定理、メネラウスの定理】 p.91～95

青チャートA: 例題 82～85

チェバの定理, メネラウスの定理については, その逆も成り立つことが知られている。

チェバの定理の逆

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上に, それぞれ点 P, Q, R があり, この 3 点のうち, 1 個または 3 個が辺上にあるとする。このとき, BQ と CR が交わり, かつ $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立てば, 3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。

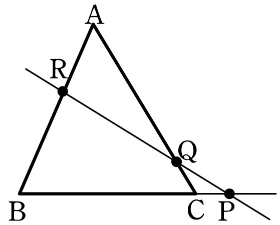


＜注意＞　上の「チェバの定理の逆」は, 定理 6′ の逆である。

メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上に, それぞれ点 P, Q, R があり, この 3 点のうち, 1 個または 3 個が辺の延長上にあるとする。このとき, $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立てば, 3 点 P, Q, R は一直線上にある。

P が辺 BC の延長上にある場合



チェバの定理の逆, メネラウスの定理の逆は, **「それぞれ3直線が 1 点で交わる」**, **「3点が一直線上にある」**ことの証明に利用できる。とくに, チェバの定理の逆を利用して, **「重心や内心(五心)の存在」**を証明することができる。

練習2) チェバの定理の逆を用いて, 次のことを証明せよ。

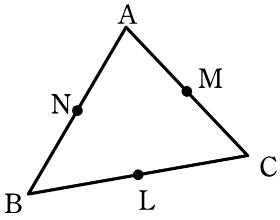
(1) 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。

(2) 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

証明 (1) △ABC において, 辺 BC, CA, AB の中点を, それぞれ L, M, N とすると

$$BL=LC,\ CM=MA,\ AN=NB$$

したがって　$\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB}=1\cdot1\cdot1=1$



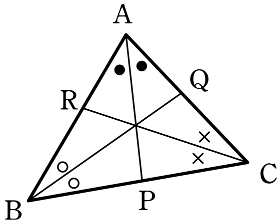
よって, チェバの定理の逆により, 3 つの中線 AL, BM, CN は 1 点で交わる。(重心)

証明(2) △ABC において, ∠A, ∠B, ∠C の二等分線が辺 BC, CA, AB と交わる点を, それぞれ P, Q, R とすると

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC},\ \frac{CQ}{QA}=\frac{BC}{BA},\ \frac{AR}{RB}=\frac{CA}{CB}$$

したがって

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}=1$$



よって, チェバの定理の逆により, 3 つの内角の二等分線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。(内心)