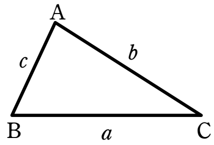
# 図形の性質【三角形の辺と角】 p.96～97

青チャートA: 例題 86～88

**【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する**

**【内容目標】三角形が成立する条件を確認しよう**

**研究　三角形の辺と角**




頂点～大文字
辺　～小文字　が多い

三角形の 3 辺の大小関係や，辺と角の大小関係について調べよう。

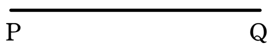
以下では，△ABC の ∠A，∠B，∠Cに向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ $a$，$b$，$c$ で表す。 辺の向かい側の頂点を見る

平面上で，2 点 P，Q を結ぶ最短経路は，線分 PQ で与えられる。このことから，△ABC において

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ ……①

であることがわかる。 一般に，次のことが成り立つ。

線分 PQ が最短経路




1 つの三角形において

[1]　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さよりも大きい。

[2]　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さよりも小さい。

点Bと点Cを結ぶ
線分BC= $a$ は
点 A を経由する
$b+c$ より短い

$a<b+c$ より
$a-b<c$，$a-c<b$
となるので
[2] が成り立つ

逆に，正の数 $a$，$b$，$c$ が ① を満たすとき，3 辺の長さが $a$，$b$，$c$ である三角形が存在する。① を 1 つの式にまとめると，次のようになる。

**【三角形の存在条件】** $|b-c|<a<b+c$ **（差より大きく、和より小さい）**

$b$ と $c$ どちらが長いか分からないため

また，正の数 $a$，$b$，$c$ の中で $a$ が最大であれば，3 辺の長さが $a$，$b$，$c$ である三角形が存在するための条件は，$a<b+c$ である。

【注意】$|b-c|$ は $b \geqq c$ のとき $b-c$，$b<c$ のとき $c-b$ を意味する。

**練習1）** 3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ。

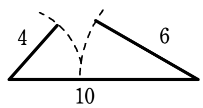
(1)　2，4，6　　　(2)　5，8，15　　　(3)　3，7，8

**【調べ方】**
① 一番長い辺以外を足したものと引いたものをつくる。
② 「差＜長い辺＜和」が　成り立つか調べる。
※長い辺でなくても良いが，何か決まりを決めておくとよい

解答

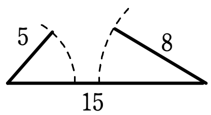
(1)　$2+4=6$ となり，
存在しない。

和より大きくなる
→三角形が存在しない（三角形が作れない）




(2)　$15>8+5$ より，
三角形は存在しない。

和と等しくなる
→三角形が存在しない（三角形が作れない）




(3)　$|7-3|<8<7+3$ より，
三角形は存在する。

差より大きく，和より小さい
→三角形が存在する

## 図形の性質【三角形の辺と角】p.96～97

青チャートA: 例題 86～88

**練習)** 3 辺の長さが $a$, $a-1$, $50-a$ の三角形がある。このとき, $a$ の値の範囲を求めよ。

解答 3 辺の長さが $a$, $a-1$, $50-a$ の三角形が存在するための条件は

$$|a-(a-1)|<50-a<a+(a-1)$$

すなわち $1 < \boxed{50-a} < 2a-1$

① $1<50-a$ から　$a<49$

② $50-a<2a-1$ から　$a>17$

よって, 求める $a$ の値の範囲は　$17<a<49$

長い辺が分からないので,
差や和が計算しやすいペアで考える。

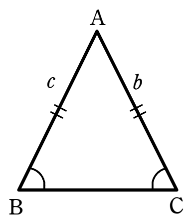
差が正になるか負になるか分からないので
絶対値の記号を付けておく

$\triangle$ABC の辺と角については, 次が成り立つ。

$$b=c \Longrightarrow \angle B=\angle C$$

これは二等辺三角形の性質である。

この逆の「$\angle B=\angle C \Longrightarrow b=c$」も成り立つ。




**例1)** $\triangle$ABC において, 次が成り立つ。

$$b>c \Longrightarrow \angle B>\angle C$$

証明 $b>c$ であるならば,

辺AC 上に AB＝AD となる点 D がとれる。

このとき, $\triangle$ABD は二等辺三角形であるから

$$\angle ABD=\angle ADB$$

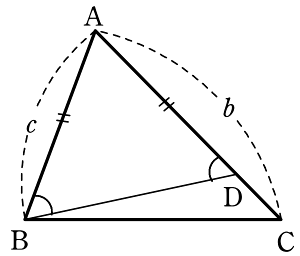
$\angle B=\angle ABD+\angle DBC$ であるから

$$\angle B>\angle ABD$$

ゆえに　$\angle B>\angle ADB$ …… ①

$\angle ADB=\angle C+\angle DBC$ であるから　$\angle ADB>\angle C$ …… ②

①, ② から　$\angle B>\angle C$　終




例1について, (a) の逆「$\angle B>\angle C$ ならば $b>c$」も成り立つことが知られている。

発展 $p_1:b>c$,　$q_1:\angle B>\angle C$,

$p_2:b=c$,　$q_2:\angle B=\angle C$,

$p_3:b<c$,　$q_3:\angle B<\angle C$

とすると, 命題 $p_1 \Rightarrow q_1$, $p_2 \Rightarrow q_2$, $p_2 \Rightarrow q_2$ は全て真である。そしてこれらの仮定と結論について, 次のことがいえる。

(i) 仮定 $p_1$, $p_2$, $p_3$ は, $a$, $b$, $c$ の大小関係のすべての場合を尽くしている。

(ii) 3 つの結論 $q_1$, $q_2$, $q_3$ は, どの 2 つも両立しない。

ここで, $q_1$ であるとき $p_1$ でないと仮定すると, (i)と(ii)より $p_1$ 以外の場合は矛盾が起こり, したがって $q_1 \Longrightarrow p_1$ は真である(背理法を用いている)。

同じように考えて $q_2 \Longrightarrow p_2$, $q_3 \Longrightarrow p_3$ も真である。

一般に, いくつかの真である命題があって, それらの仮定がすべての場合を尽くしており, また, 結論のどの 2 つも両立しないとき, これらの命題の逆がすべて真であることが証明できる。このような証明方法を転換法という

# 図形の性質【三角形の辺と角】 p.96～97

青チャートA: 例題 86～88

一般に，次のことが成り立つ。

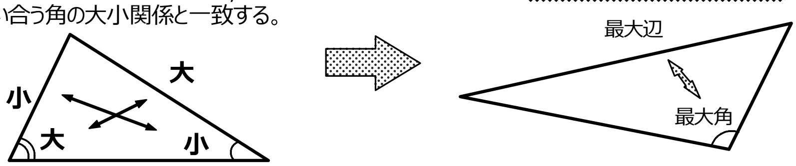
**三角形の辺と角の大小関係**

△ABC において　$b > c \iff \angle B > \angle C$

三角形の辺と
角の大小関係

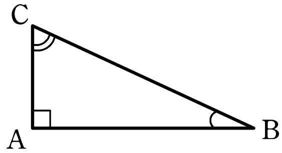
三角形の 2 辺の大小関係は，その
向かい合う角の大小関係と一致する。

特に，**最大辺の向かいが最大角！**



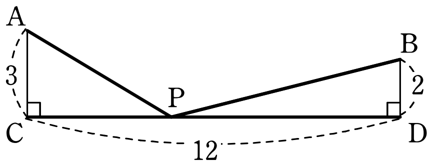

**練習2）** 次が成り立つことを示せ。

直角三角形では，3 辺のうち斜辺が最大である。




解答　直角三角形において，三角形の内角の和が 180° であることから，
直角以外の角は 90° より小さい。
（ $A = 90°$ とすると $90° + B + C = 180°$ より $B + C = 90°$ ）
すなわち，直角が最大の角である。
よって，直角に向かい合う辺すなわち斜辺が 3 辺のうち最大である

**4STEP数学Ａ　問題１８１）** 右の図において，点 P が線分CD 上を動くとき，線分の和 AP＋PB の最小値とそのときの点 P の位置を求めよ。
【青チャート数学A基本例題88類題】




解答　直線 CD に関して点 B と対称な点を B′ とすると，

PB＝PB′ であるから

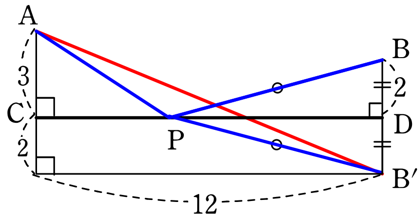
$$AP + PB = AP + PB'$$

よって，AP＋PB が最小になるのは，点 P が線分 CD と線分 AB′ の交点にあるときである。

このとき　$CP : PD = AC : DB' = 3 : 2$

また　$AP + PB = AB' = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

したがって，AP＋PB は P が線分 CD を 3:2 に内分するとき最小値 13 をとる。




参考 これは水くみ問題などの最短距離を求めるパズルで見られる。

参考　△AB′P において，2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きいから

$$AP + PB' > AB'$$

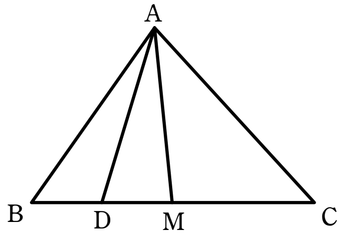
よって，点 P が線分 CD と線分 AB′ の交点にあるとき，AP＋PB′ は最小となる。また，直線 CD に関して点 A と対称な点を A′ として，同様に考えてもよい。

# 図形の性質【三角形の辺と角】 p.96～97

青チャートA: 例題 86～88

**青チャート数学Ａ　例題８０）**

$\triangle$ABC において，辺 BC の中点を M，
線分 BM の中点を D とするとき，
$3AB^2+AC^2=4AD^2+12BD^2$
が成り立つことを示せ。

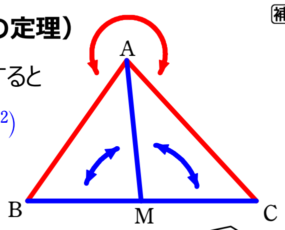



**中点の活用　中線定理（パップスの定理）**

$\triangle$ABC の辺 BC の中点を M とすると

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

逆は成り立たない

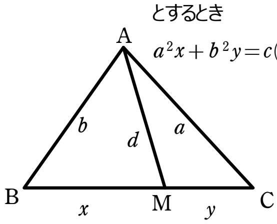



補足 中線定理の証明は
①三平方の定理による証明
②余弦定理（三角比）による証明
③ベクトルによる証明
④座標平面（図形と方程式）による証明
があげられる。

補足 中線定理は平行四辺形の法則とも言われる（AB，AC を対角線とみる）。
また，パップスの定理とも言われるが，発見したのはアポロニウスである。
アポロニウス：紀元前262年頃～紀元前190年頃の古代ギリシアの数学・天文学者
パップス：4世紀前半のアレキサンドリア生まれのエジプトの数学者

補足 中線定理は
スチュワートの定理の
M が中点のケース。
(余弦定理や補角の
公式などで証明できる)

$BC=c=x+y$
とするとき
$a^2x+b^2y=c(d^2+xy)$




解答 $\triangle$ABC において，中線定理により　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

$BM=2BD$ であるから　$BM^2=4BD^2$

よって　$AB^2+AC^2=2AM^2+8BD^2$ …… ①

また，$\triangle$ABM において，中線定理により

$AB^2+AM^2=2(AD^2+BD^2)$ …… ②

② から　$AM^2=2(AD^2+BD^2)-AB^2$

これを ① に代入すると

$$AB^2+AC^2=2\{2(AD^2+BD^2)-AB^2\}+8BD^2$$
$$=4AD^2+4BD^2-2AB^2+8BD^2$$

よって　$3AB^2+AC^2=4AD^2+12BD^2$

**線分の平方**

○ 直角を作って三平方の定理
　$AB^2+AC^2=BC^2$ など
○ 中線があれば中線定理

参考 三平方の定理による証明について

$\triangle$ABC が鋭角三角形の場合
A から線分BCに垂線をおろし
その足を H とする。

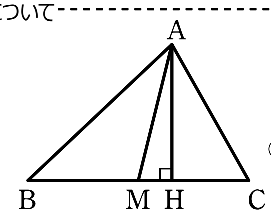
$AB^2=AH^2+BH^2$

$AB^2=AH^2+(BM+MH)^2$

$AB^2=AH^2+BM^2+2BM\cdot MH+MH^2$ …①

次に

$AC^2=AH^2+CH^2$




鈍角三角形のときはMH－CM

$AC^2=AH^2+(CM-MH)^2$

$AC^2=AH^2+CM^2-2CM\cdot MH+MH^2$ …②

① + ② から

$AB^2+AC^2=2AH^2+2BM^2+2MH^2$

（$\because$ BM = CM）

$AB^2+AC^2=2(AH^2+MH^2)+2BM^2$

$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$