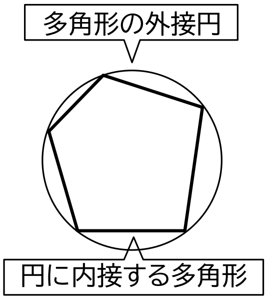
図形の性質【円に内接する四角形】 p.98～101

青チャートA: 例題 89～91

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】円と内接する多角形の間に成り立つ定理や性質を使いこなそう



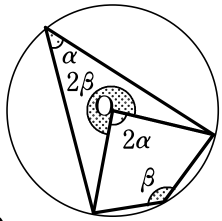
多角形のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとき，その多角形は円に **内接** するといい，その円を多角形の **外接円** という。

三角形は必ず円に内接するが，三角形以外の多角形は必ずしも円に内接するとは限らない。

ここでは，円に内接する四角形の性質，四角形が円に内接するための条件について調べよう。

□円周角の定理

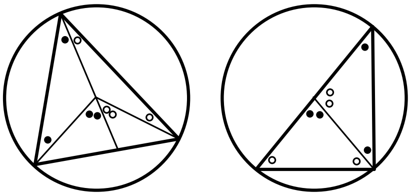
1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分である。



補足 **半円の弧（直径）に対する円周角の大きさは 90° である。直径⇔直角**

（タレスの定理：ギリシャ七賢人の一人，紀元前624年頃～紀元前546年頃）

参考 証明 △ABC の内側および辺上に O があるときは，二等辺三角形の性質と三角形の外角の性質を使えばよい



参考 証明

△ABC の外側に O があるとき，二等辺三角形より

$\angle ACO = \angle CAO$，$\angle BCO = \angle CBO$

三角形の外角の性質より

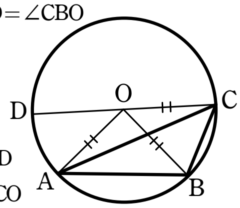
$\angle AOD = 2\angle ACO$

$\angle BOD = 2\angle BCO$

$\therefore \angle AOB = \angle BOD - \angle AOD$

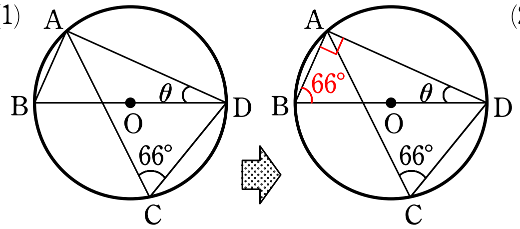
$= 2\angle BCO - 2\angle ACO$

$= 2\angle ACB$

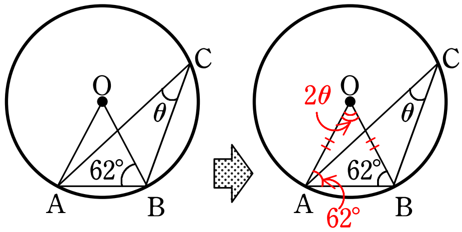


練習１３） 右の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

(1)



(2)



(1) 円周角の定理により $\angle ABD = \angle ACD = 66°$

線分 BD は円の直径であるから $\angle BAD = 90°$

△ABD の内角の和は 180° であるから

$\theta = 180° - (90° + 66°) = 24°$

補足 θ はギリシャ文字(小文字)でシータと読む。

(2) △OAB は OA＝OB の二等辺三角形であるから

$\angle OAB = \angle OBA = 62°$

△OAB の内角の和は 180° であるから

$\angle AOB = 180° - 62° \times 2 = 56°$

円周角の定理により $\theta = \dfrac{1}{2}\angle AOB = 28°$

図形の性質【円に内接する四角形】p.98～101

青チャートA: 例題 89～91

○円周角の定理の逆も成り立つ。

円周角の定理の逆

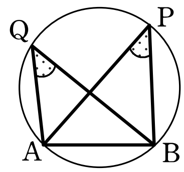
4 点 A，B，P，Q について，

点 P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

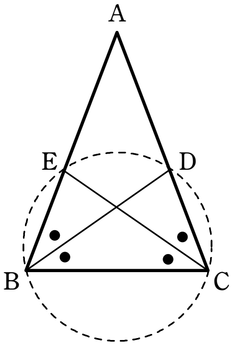
$\angle APB = \angle AQB$

ならば，4 点 A，B，P，Q は 1 つの円周上にある。

同じ角が描く曲線は
円になる



練習） 二等辺三角形ABC において，底角∠B, ∠C の二等分線と対辺との交点をそれぞれD，E とするとき，4 点 B, C, D, E は 1 つの円周上にあることを証明せよ。



証明　2 点 B, C は直線DE に関して同じ側にあって $\angle EBD = \angle ECD$

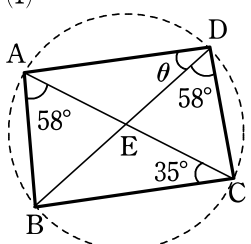
EDが共通する弧
B と C が異なっている

よって，4 点 B, C, D, E は 1 つの円周上にある。

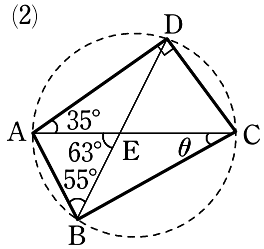
練習１４） 右の図において，角 θ を求めよ。

円周角の定理の逆を用いて
円をかきこんでみよう！

(1)



(2)



(1) A と D は直線 BC に関して同じ側にあり，$\angle BAC = \angle BDC$ であるから，円周角の定理の逆により，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

よって，円周角の定理により

$\theta = \angle ACB = 35°$

(2) △ACD の内角の和は 180° であるから

$\angle ACD = 180° - (90° + 35°) = 55°$

よって，B と C は直線 AD に関して同じ側にあり，

$\angle ABD = \angle ACD$ であるから，

円周角の定理の逆により，

4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

よって，円周角の定理により

$\angle CBD = \angle CAD = 35°$

また　$\angle BEA = \angle EBC + \angle ECB$

よって　$63° = 35° + \theta$

ゆえに　$\theta = 28°$

図形の性質【円に内接する四角形】 p.98～101

青チャートA: 例題 89～91

□円に内接する四角形の性質

四角形の 1 つの内角に向かい合う内角を，その内角の **対 角** という。

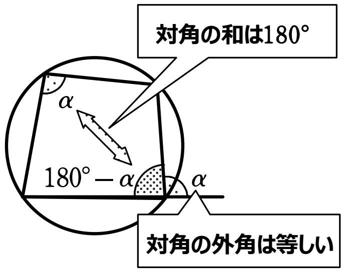
円に内接する四角形

定理 8　四角形が円に内接するとき，

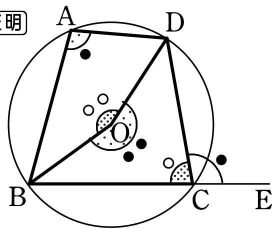
次の 1， 2 が成り立つ。

1　四角形の対角の和は 180° である。

2　四角形の内角は，その対角の外角に等しい。



証明



四角形 ABCD が円に内接するとき $\angle BAD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$ とすると，弧 BAD に対する中心角は 2β，弧 BCD に対する中心角は 2α である。円周角と中心角の関係から

$2\alpha+2\beta=360^\circ$ （●●＋○○＝360）であるから

$\alpha+\beta=180^\circ$ （● ＋ ○ ＝180°） ……①

よって，1が成り立つ。 また，頂点 C における外角を $\angle DCE$ とすると

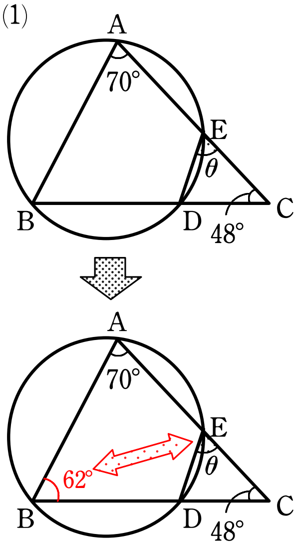
$\angle DCE=180^\circ-\beta$

これは，①から $\angle BAD$ に等しい。 よって，2も成り立つ。

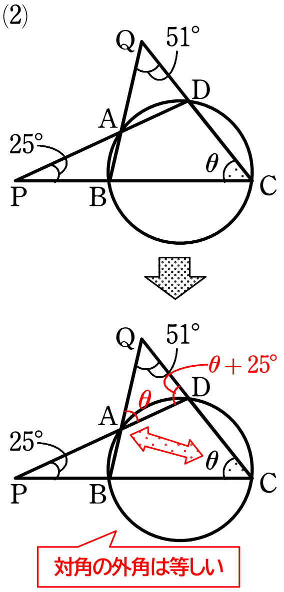
円に内接する四角形

練習１５） 下の図において，角 θ を求めよ。

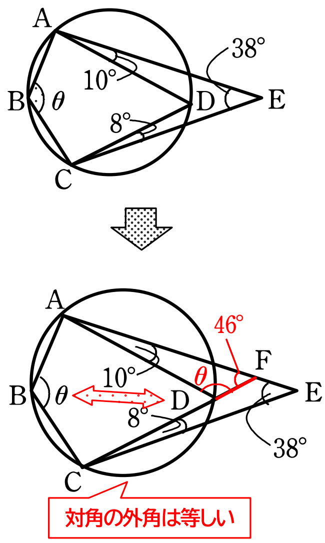
(1)



(2)



(3)



解答(1)　△ABC において　　$\angle B=180^\circ-(70^\circ+48^\circ)=62^\circ$

四角形 ABDE は円に内接しているから　　$\theta=\angle B$

よって　　$\theta=62^\circ$

(2)　△PCD の外角から　$\angle \mathrm{ADQ}=\theta+25^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle \mathrm{QAD}=\theta$

よって，△QAD において　$51^\circ+\theta+(\theta+25^\circ)=180^\circ$

ゆえに　$\theta=52^\circ$

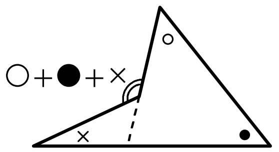
(3)　直線 CD と AE の交点を F とすると，△ECF の外角から　$\angle \mathrm{AFD}=8^\circ+38^\circ=46^\circ$

四角形 ABCD は円に内接しているから

$\angle \mathrm{ADF}=\theta$

よって，△ADF において　$10^\circ+\theta+46^\circ=180^\circ$

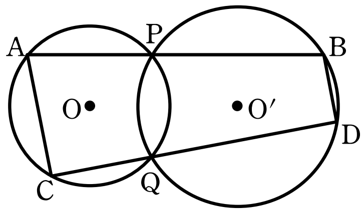
ゆえに　$\theta=124^\circ$



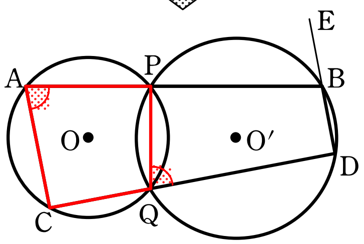
参考 ブーメラン型の図形について，上のようなことが知られている。証明は上図の補助線や平行線，2頂点を結ぶ補助線により証明ができる。

応用例題２）

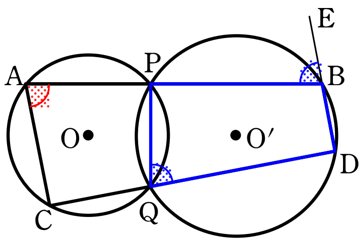
右の図のように，交わる２つの円O，O′ の交点を P，Q とする。P を通る直線が，円 O，O′ と交わる点を，それぞれ A，B とし，Q を通る直線が，円 O，O′ と交わる点を，それぞれ C，D とする。このとき，AC∥BD であることを証明せよ。



①



②



証明　四角形 ACQP は円 O に内接しているから

$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{PQD}$　……①

四角形 PQDB は，円 O′ に内接しているから，頂点 B における外角を ∠PBE とすると

$\angle \mathrm{PQD}=\angle \mathrm{PBE}$　……②

①，② より，$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{PBE}$

であるから　AC∥BD　終

深める　応用例題 2 の証明において，定理８がどこで使われているか説明しよう。

解答
等式①，②で使われている

□四角形が円に内接するための条件

円に内接する四角形について，逆も成り立つ。

四角形が円に内接するための条件

定理 9　次の 1，２のどちらかが成り立つ四角形は円に内接する。

1　1 組の対角の和が 180° である。

2　1 つの内角が，その対角の外角に等しい。

四角形が
円に内接する
ための条件

1 ⟺ 2 が成り立つから，ここでは 1 について証明する。

【定理9　1 の証明】

四角形 ABCD において

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$ …… ①

であるとする。

右の図のように，△ABC の外接円 O の B を含まない弧 AC 上に点 D′ をとると，四角形 ABCD′ は円 O に内接するから

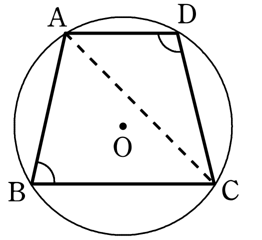
$\angle ABC + \angle AD'C = 180°$ …… ②

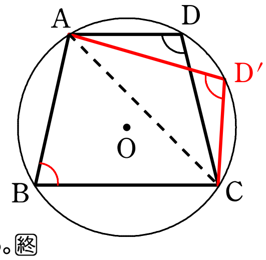
よって，①，② から　$\angle ADC = \angle AD'C$

円周角の定理の逆から，4 点 A，C，D′，D は 1 つの円周上にある。

△ACD′ の外接円は円 O であるから，点 D も円 O の周上にある。

点 B も円 O の周上にあるから，四角形 ABCD は円 O に内接する。㊎

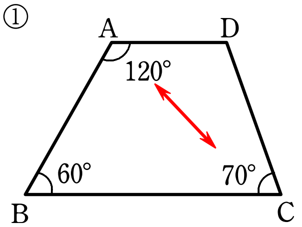




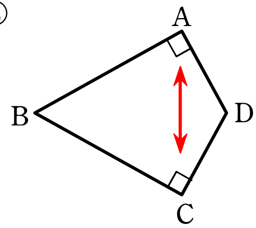
補足　定理「A ならば B」があるとき，その逆「B ならば A」が成り立つことを示す証明方法の一つとして **同一法** がある。
A ならば B が正しいとき，B を満たすものが 1 つしかなければ，それは A を満たすと結論できるのである。
例えば，二等辺三角形 ABC（AB＝AC）において，底辺 BC の垂直二等分線を引けば，それは頂点を通るので、
「BC の垂直二等分線」と「A から BC への垂線」はそれぞれ唯一（他に描けない）であるから，
頂点 A から BC への垂線を下ろせばそれは BC への垂直二等分線になる。

例）　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

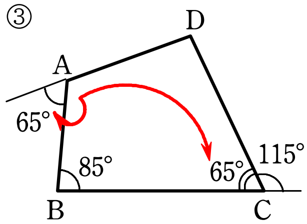
①



②



③



解答　① $\angle BAD + \angle BCD$
$= 120° + 70°$
$= 190° \neq 180°$

② $\angle BAD + \angle BCD$
$= 90° + 90° = 180°$

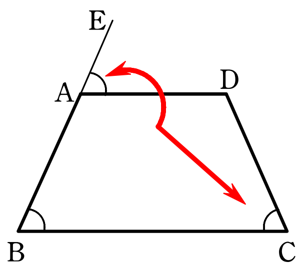
③ $\angle BCD = 180° - 115°$
$= 65°$

よって，円に内接するものは　②，③

図形の性質【円に内接する四角形】 p.98～101

青チャートA: 例題 89～91

例題） AD∥BC である台形 ABCD において，$\angle ABC = \angle BCD$ であるとき，この台形は円に内接する。このことを証明せよ。



証明

AD∥BC であるから，右の図で

$\angle EAD = \angle ABC$

よって，$\angle ABC = \angle BCD$ であるとき，

$\angle EAD = \angle BCD$ となるから，

台形 ABCD は円に内接する。

内角が，その対角の外角に等しい

注意 台形の一種で１本の底辺の両端の内角が互いに等しい図形のことを「**等脚台形**」という。

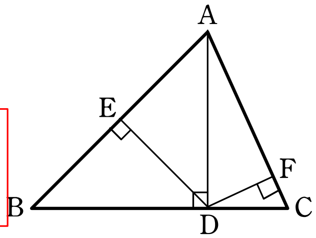
・もう一組の底辺の両端の内角も互いに等しくなる。

・線対称な図形であり，その対称軸は２本の底辺それぞれの中点をともに通る直線。

・図の辺ABと辺CDのように台形の脚の長さが互いに等しくなる。

（等脚台形の名前の由来はこの性質であるが、平行四辺形や長方形でも成り立つ性質のため「脚の長さが等しい台形は，等脚台形である」という認識は正しくはない。）

4STEP数学Ａ 問題１９３） 鋭角三角形 ABC の頂点 A から BC に下ろした垂線を AD とし，D から AB，AC に下ろした垂線をそれぞれ DE，DF とするとき，四角形 BCFE は円に内接することを証明せよ。【青チャート基本例題９０類題】



何が言えればよいか確認しよう（ゴールからの逆算）

解答

$\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$ より，

四角形 AEDF の１組の 対角の和が 180° であるから，四角形 AEDFは円に内接する。

よって　$\angle AFE = \angle ADE$ …… ①

また，$\angle ADE + \angle BAD = 90^\circ$，

$\angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$ より

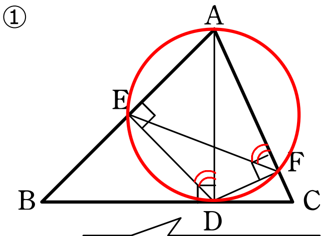
$\angle ADE = \angle ABD$ …… ②

①，②より　$\angle AFE = \angle ABD$

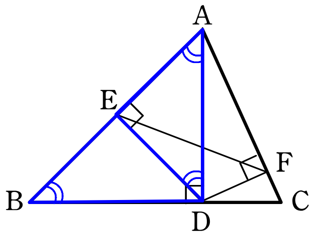
すなわち　$\angle AFE = \angle EBC$

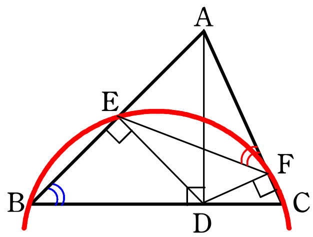
四角形 BCFE の１つの内角が，

その対角の外角に等しいから，四角形 BCFE は円に内接する。



ADが直径ということも分かる
直角二つで円(まる)くなる





参考 同様に，$\angle AEF = \angle ACD$ を示すことによって，四角形 BCFE が円に内接することを証明してもよい。

図形の性質【円に内接する四角形】 p.98～101

青チャートA: 例題 89～91

赤チャート数学Ａ　練習５６） 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを，トレミーの定理を利用して求めよ。

解答

1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE について，

対角線の長さを x とする。

四角形 ABCD は正五角形の外接円に内接するから，

トレミーの定理 AB・CD＋BC・DA＝AC・BD　により

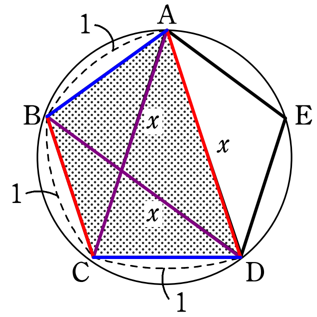
$$1\cdot1+1\cdot x=x\cdot x$$

ゆえに　$x^2-x-1=0$

よって　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



この数字から連想されるものはなんでしょう？

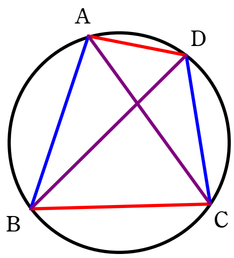
⇒$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で表される比を黄金比という

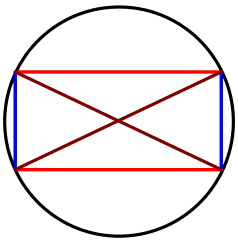
⇒ちなみに白銀比は $1:\sqrt{2}$ や $1:(1+\sqrt{2})$ を指す

トレミーの定理 （Ptolemy's Theorem）

AB・CD ＋ BC・DA ＝ AC・BD

[対辺の積] ＋ [対辺の積] ＝ [対角線の積]





縦 a，横 b，

対角線の長さ c の長方形だと

$$a^2+b^2=c^2$$

となり三平方の定理ができあがる

※証明方法は

1．三角形の相似を用いる（青チャートp.483）

2．余弦定理の利用

3．正弦定理の利用

などがある。

クラウディオス・プトレマイオス（英称はトレミー）

数学や天文学、占星学、音楽学、光学、地理学などで業績を残した古代ローマの学者(83年頃～168年頃)

トレミーはプトレマイオスの英語表記 Ptolemy の音訳である。

そのためプトレマイオスの定理ともいう。

トレミーの定理を一般化したものはオイラーの定理という。