図形の性質【円と直線】 p.102～104

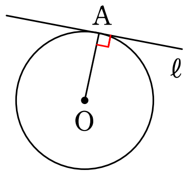
青チャートA: 例題 92～94

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】円の接線の性質や弦と接線の位置関係を見極めて、接弦定理を使いこなそう

□円の接線

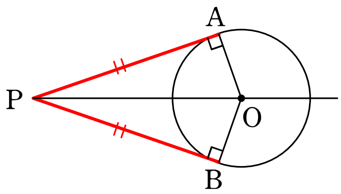
円 O の周上の点 A を通る直線 ℓ について，次が成り立つ。



直線 ℓ が点 A で円 O に接する　$\Longleftrightarrow$　$OA\perp\ell$

この直線 ℓ は，点 A における円 O の **接　線** である。

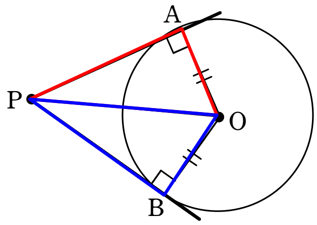
また，点 A は，直線 ℓ と円 O の **接　点** である。



右の図のように，円 O には外部の点 P から，2 本の接線を引くことができる。それぞれの接点を A，B とするとき，線分PA，PB の長さを，点 P から円 O に引いた **接線の長さ** という。

円に引いた 2 つの接線の長さについては，次のことがいえる。

接線の長さ
定理 10　円の外部の 1 点からその円に引いた 2 本の接線について，2 つの接線の長さは等しい。



証明　右の図の △OAPと △OBP において

OP は共通，$OA=OB$，

$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

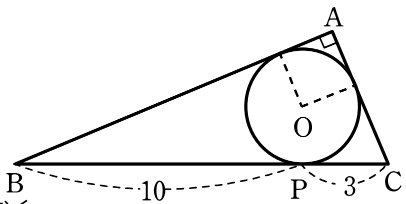
よって　$\triangle OAP\equiv\triangle OBP$

ゆえに　$PA=PB$

例） 右の図において，円 O は $\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC の内接円であり，点 P は辺 BC 上の接点である。円 O の半径を r とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB，CA を r で表せ。

(2)　r の値を求めよ。



解答　(1)　2 辺 CA, AB と円 O の接点を，それぞれQ, R とおく。

$OQ\perp CA,\ OR\perp AB,\ OQ=OR=r$ であるから，

四角形 AROQ は正方形である。

接線と半径は直交する

よって　$AR=AQ=r$

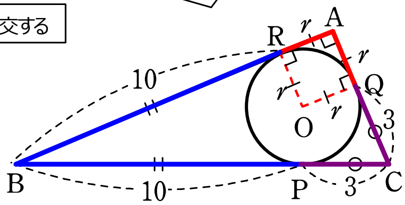
また，$BR=BP$ であるから　$BR=10$

ゆえに　$AB=AR+BR=r+10$

$CQ=CP$ であるから　$CQ=3$

ゆえに　$CA=AQ+CQ=r+3$

まずは同じ長さになる所を確認しよう



(2)　△ABC において，三平方の定理により

$AB^2+CA^2=BC^2$　すなわち　$(r+10)^2+(r+3)^2=13^2$

整理すると　$r^2+13r-30=0$　よって　$(r+15)(r-2)=0$

$r>0$ であるから　$r=2$

図形の性質【円と直線】 p.102～104

例） △ABC において，AB＝7，BC＝8 とする。この三角形の内接円と辺 BC，CA，AB との接点を，それぞれ P，Q，R とするとき，次の問いに答えよ。

(1) BP の長さを x とするとき，AQ と QC の長さを，それぞれ x で表せ。

(2) CA＝5 であるとき，BP の長さを求めよ。

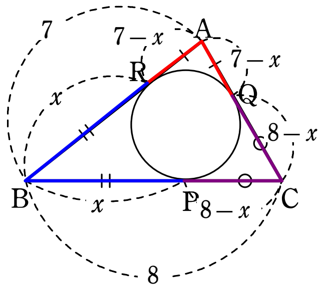
解答 (1) BR＝BP，AB＝7 であるから

AR＝7－x

AR＝AQ より　AQ＝7－x

また，QC＝PC，PC＝8－x であるから

QC＝8－x



(2) CA＝5 より　(7－x)＋(8－x)＝5

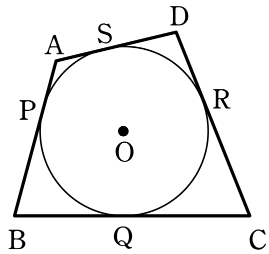
これを解いて　x＝5

よって　BP＝5

例題３） 右の図のように，円 O が四角形 ABCD の各辺に点 P，Q，R，S で接している。

このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

AB＋CD＝BC＋DA



方針 考え方 … 辺の長さを接線の長さの和に分解する

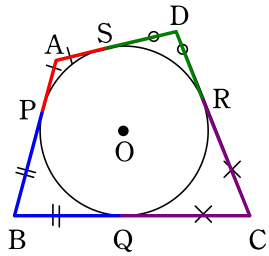
証明 AB，AD は円 O に接するから $\boxed{\text{AP＝AS}}$

同様にして

$\boxed{\text{BP＝BQ}}$，$\boxed{\text{CQ＝CR}}$，$\boxed{\text{DR＝DS}}$

よって

$$
\begin{aligned}
AB+CD &= (AP+BP)+(CR+DR)\\
&= (AS+BQ)+(CQ+DS)\\
&= (BQ+CQ)+(AS+DS)\\
&= BC+DA
\end{aligned}
$$



終

逆に「四角形の２組の対辺の和が等しいならば，この四角形は円に外接する」も成り立つ

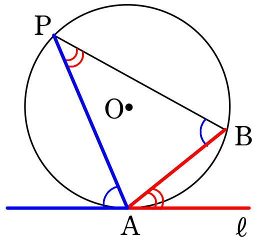
外接：一つの円の円周が一つの多角形の各辺に一点で接すること
内接：多角形の各頂点が一つの円の円周上の一点に接すること

図形の性質【円と直線】 p.102～104

青チャートA: 例題 92～94

□円の接線と弦の作る角（接弦定理）

定理 11　円 O の弦 AB と，その端点 A における接線 AT が作る角 $\angle$BAT は，その角の内部に含まれる弧 AB に対する円周角 $\angle$ACB に等しい。



円の接線と
弦の作る角

証明　<u>$\angle$BAT が鋭角の場合</u>

円 O の周上に，AD が円 O の直径となるように，点 D をとると，

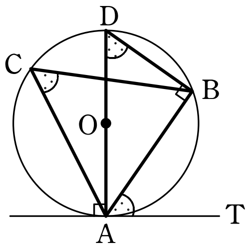
AD$\perp$AT，$\angle$ABD$=90^\circ$ であるから

$\angle$BAT$=90^\circ-\angle$BAD　…… ①，$\angle$ADB$=90^\circ-\angle$BAD　…… ②

①，② より　$\angle$BAT$=\angle$ADB

$\angle$ACB と $\angle$ADB は弧 AB に対する円周角であるから　$\angle$ADB$=\angle$ACB

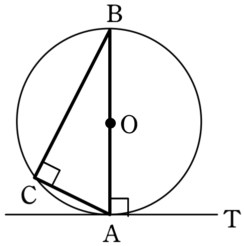
よって　　$\angle$BAT$=\angle$ACB　　終



<u>$\angle$BAT が直角の場合</u>

AB は直径であるから　$\angle$ACB$=90^\circ$

よって　$\angle$BAT$=\angle$ACB

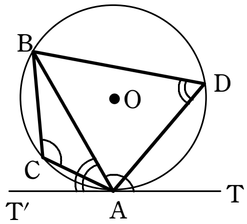


<u>$\angle$BAT が鈍角の場合</u>

右の図のように，TA の A を越える延長上に T′ をとり，C を含まない弧 BA 上に点 D をとると，$\angle$ADB は鋭角で　$\angle$BAT′$=\angle$ADB

$\angle$ACB$+\angle$ADB$=180^\circ$，　$\angle$BAT′$+\angle$BAT$=180^\circ$

よって　$\angle$BAT$=\angle$ACB

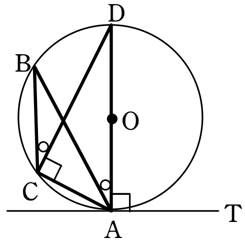


(別証)　$\angle$BAT が鈍角の場合，　右の図のように A を通る直径を AD とし，

D と C を結ぶと　$\angle$BAT$=\angle$BAD$+90^\circ$

また，AD が直径であるから　$\angle$ACB$=\angle$BCD$+90^\circ$

円周角の定理により　$\angle$BAD$=\angle$BCD　よって　$\angle$BAT$=\angle$ACB



逆も成り立つ
「$\angle$BAT$=\angle$APBならば，直線ATは円Oの接線である」

チャートでは同一法での証明が記載されている

証明　円O の弦AB とA を通る直線ATとの作る角を $\angle$BAT とし, $\angle$BAT 内の弧に対する円周角を $\angle$APB とすると, 仮定より　$\angle$BAT$=\angle$APB…①

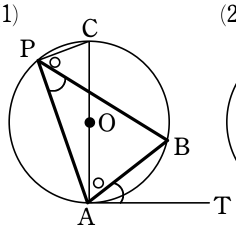
A を通る円O の直径を AC とする。弧BC の円周角は等しいので　$\angle$BAC$=\angle$BPC…②

図(1) では①+②, 図(2) では①−②から$\angle$CAT$=\angle$APC

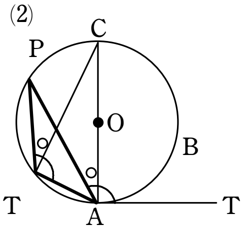
ここで，$\angle$APC$=90^\circ$ より　$\angle$CAT$=90^\circ$

よって，AT は円O の接線である。 なお，$\angle$BAT$=90^\circ$ のときは明らかである。

(1)



(2)



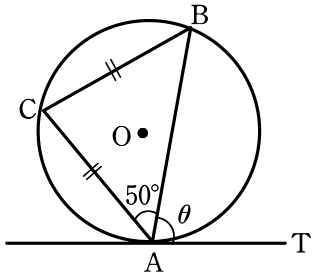
図形の性質【円と直線】 p.102～104

青チャートA: 例題 92～94

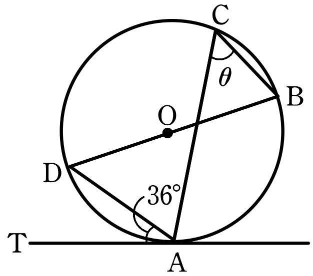
例） 下の図において，直線 AT は円 O の接線である。角 θ を求めよ。

ただし，(1) ではCA＝CB とする。

(1)



(2)

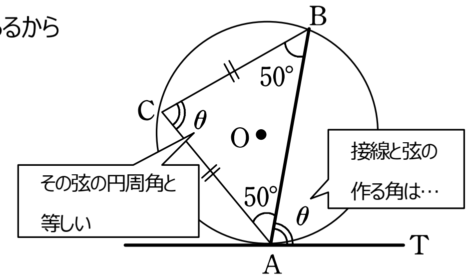


解答 (1) △ABC は CB＝CA の二等辺三角形であるから

$$\angle CBA = \angle CAB = 50^\circ$$

よって　$\angle ACB = 180^\circ - 2\times 50^\circ = 80^\circ$

接線と弦の作る角の定理から　$\theta = \angle ACB = 80^\circ$



(2) 接線と弦の作る角の定理から

$$\angle ABD = \angle DAT = 36^\circ$$

BD は円 O の直径であるから　$\angle DAB = 90^\circ$

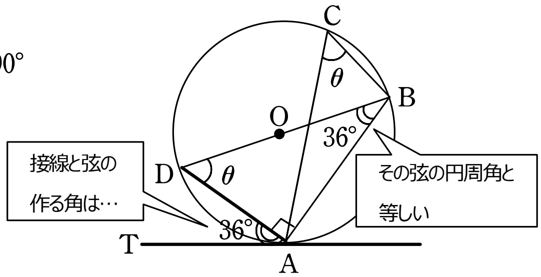
円周角の定理により

$$\angle ADB = \angle ACB = \theta$$

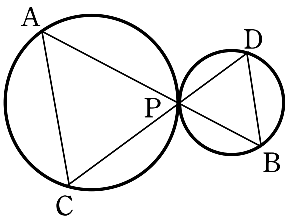
△ABD の内角の和は 180° であるから

$$90^\circ + 36^\circ + \theta = 180^\circ$$

よって　$\theta = 54^\circ$



練習） 点 P で外接する 2 つの円がある。P を通る 2 本の，直線が右の図のように，2 つの円とそれぞれ A，B および C，D で交わるとき，AC∥DB であることを証明せよ。



証明 点 P における共通接線を引く。

円の接線と弦の作る角の性質により，右の図において

$$\boxed{\angle EPA = \angle ACP}$$

$$\boxed{\angle FPB = \angle BDP}$$

$\angle EPA = \angle FPB$ であるから

$$\angle ACP = \angle BDP$$

錯角が等しいから　AC∥DB