図形の性質【方べきの定理】 p.105～107

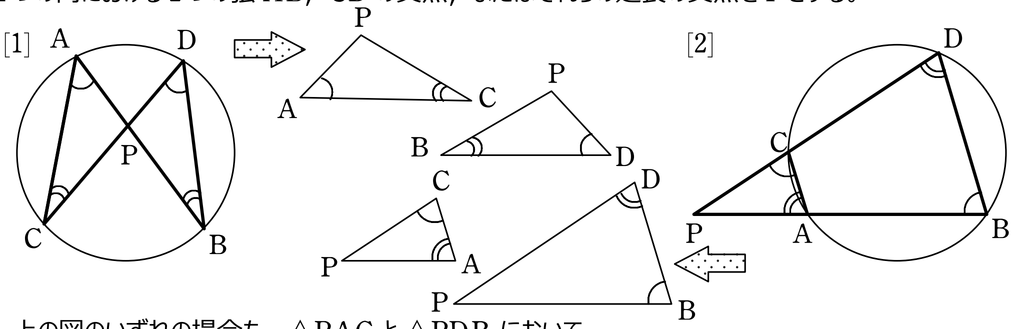
青チャートA: 例題 95～97

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】図形を見極めて，方べきの定理を使いこなそう

□方べきの定理

1 つの円における 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とする。



上の図のいずれの場合も，△PAC と △PDB において

[1]は，円周角の定理より

∠APC＝∠DPB

∠PAC＝∠PDB

[2]は円に内接する四角形の性質（対角の外角と等しい）より

である。よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

△PAC∽△PDB

したがって，辺の比について，PA：PD＝PC：PB が成り立つ。

これを内掛け、外掛けすると　PA・PB ＝ PC・PD

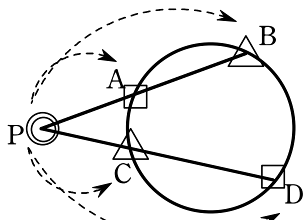
比の式を内掛け・外掛けするのでかけ算の式になる！

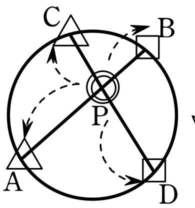
このことから，次の **方べきの定理** I が得られる。

冪：同じ数の相乗積 という意味からも「掛け算」であることに注意！（比にしてしまう人がいます）
PA・PB の値を「点P の円O に関する方べき」といい，この値が一定になると言っている

方べきの定理 I

定理１２　円の 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，PA・PB＝PC・PD が成り立つ。





2 直線の交点◎から円の端△□までの距離の積は等しい（P◎は円の内部でも外部でも無関係）

方べきの定理

また，次のような形でも方べきの定理 II が成り立つ

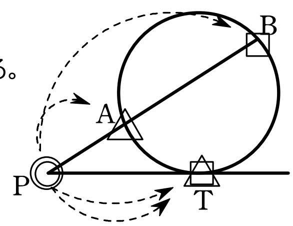
方べきの定理 II

定理１３　円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。

P を通ってこの円と 2 点 A，B で交わる直線を引くと，

PA・PB＝PT^2 が成り立つ。

接点は△□が重なっている（同じ長さとみる）

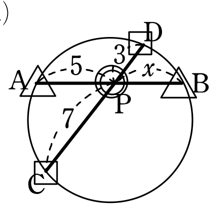


図形の性質【方べきの定理】p.105～107

青チャートA: 例題 95～97

練習２１） 下の図において，x の値を求めよ。

(1)



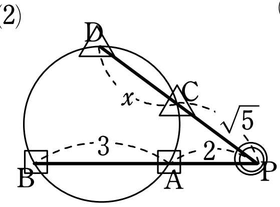
(1) 方べきの定理により

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

よって　$5 \cdot x = 7 \cdot 3$

ゆえに　$x = \dfrac{21}{5}$

(2)



(2) 方べきの定理により

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

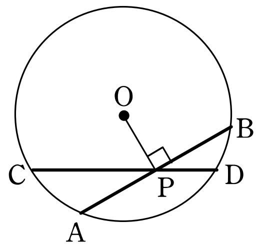
よって

$2 \cdot (2+3) = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} + x)$

ゆえに　$x = \sqrt{5}$

練習２３） 円の中心 O から，直径でない弦 AB に垂線 OP を下ろす。P を通る他の弦を CD とすると，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$PC \cdot PD = PA^2$



［解答］ 方べきの定理により

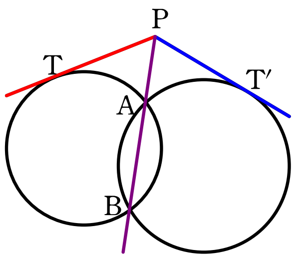
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　…… ①

また，円の中心から弦に下ろした垂線は，その弦を 2 等分するから

$PA = PB$　…… ②

①，② から　$PC \cdot PD = PA^2$

練習２４） 右の図のように，2 点 A，B で交わる 2 つの円に線分 AB の延長上の点 P から接線 PT，PT′ を引くとき，PT＝PT′ であることを証明せよ。



［証明］ PT，PT′ は，それぞれ円の接線であるから，

方べきの定理により

$PT^2 = PA \cdot PB$,　$PT'^2 = PA \cdot PB$

よって　$PT^2 = PT'^2$　　ゆえに　$PT = PT'$

□方べきの定理は，その逆も成り立つ。

４点が同一円周上にあることを示すものとして「円周角の定理の逆」、「円に内接する四角形の逆」、「方べきの定理の逆」が有名なので押さえておきたい。

> 方べきの定理 I の逆
>
> 2 つの線分 AB と CD，または AB の延長と CD の延長が点 P で交わるとき，
>
> $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つならば，4 点 A，B，C，D は 1 つの円周上にある。

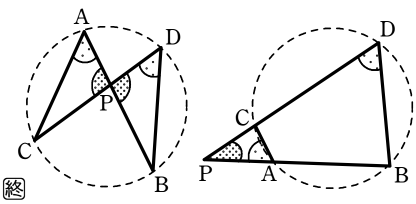
［補足］ 方べきの定理 II についても，その逆が成り立つ。

［証明］ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ から　$PA : PD = PC : PB$

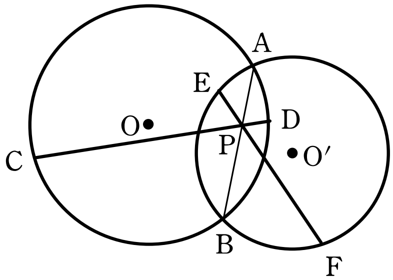
また　$\angle APC = \angle DPB$　ゆえに　$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$

よって　$\angle PAC = \angle PDB$

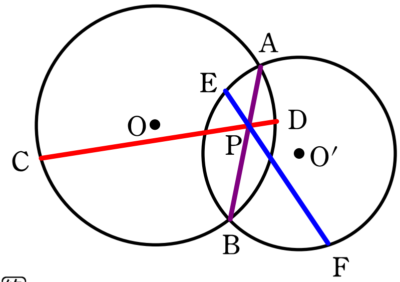
したがって，4 点 A, B, C, D は 1 つの円周上にある。［終］



応用例題３）



2 点 A，B で交わる 2 つの円 O，O′ がある。
円 O の弦 CD と円 O′ の弦 EF が，
線分 AB 上の 1 点 で交わるとき，
4 点 C，D，E，F は 1 つの円周上にあることを
証明せよ。



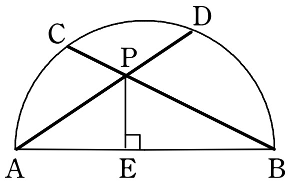
証明　CD，EF が AB 上で交わる点を P とすると，
方べきの定理により

$$PC\cdot PD=PA\cdot PB \quad \cdots\cdots ①$$

$$PE\cdot PF=PA\cdot PB \quad \cdots\cdots ②$$

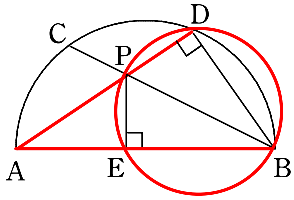
①，② から　$PC\cdot PD=PE\cdot PF$
よって，方べきの定理の逆により，
4 点 C，D，E，F は 1 つの円周上にある。　終

サクシード数学Ａ　重要例題７９） AB を直径とする半円の 2 つの弦 AD，BC の交点を P とし，P から AB に垂線 PE を下ろす。このとき，次のことを証明せよ。



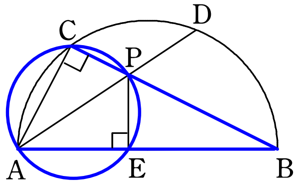
(1)　$AP\cdot AD=AE\cdot AB$

(2)　$AP\cdot AD+BP\cdot BC=AB^2$　【青チャート数学A重要例題９７類題】



解答　(1)　AB は直径であるから　$\angle BDP=90^\circ$
よって，$\angle PEB+\angle BDP=180^\circ$ であるから，
4 点 P，E，B，D は 1 つの円周上にある。
ゆえに，方べきの定理から

$$AP\cdot AD=AE\cdot AB \quad \cdots\cdots ①$$



(2)　$\angle PCA=90^\circ$ であるから，$\angle PCA+\angle AEP=180^\circ$
となり，4 点 P，C，A，E は 1 つの円周上にある。
ゆえに，方べきの定理から

$$BP\cdot BC=BE\cdot BA \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② の辺々を加えると

$$\begin{aligned}AP\cdot AD+BP\cdot BC&=AE\cdot AB+BE\cdot BA\\&=(AE+BE)\cdot AB\\&=AB\cdot AB=AB^2\end{aligned}$$

図形の性質【方べきの定理】 p.105～107

青チャートA: 例題 95～97

□方べきの定理（方冪の定理、方羃の定理、方巾の定理、power of a point theorem）

方べきの定理はいろいろな定理や性質の証明で用いることもできる。

（方べきの定理でなくてはいけな　いかどうかは別の話）

○方べきであることから…

・三平方の定理 (

・相加平均・相乗平均の関係の証明

・ ヒポクラテスの三角形 Hippocrates

・アルキメデスの双子円 Archimedes

・相加平均・相乗平均・調和平均・二乗平均の関係

・余弦定理

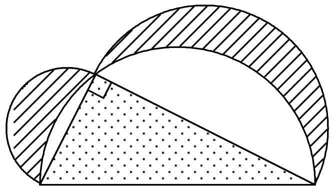
・中線定理 (Pupp ie s)

・胡蝶定理 B utterfly

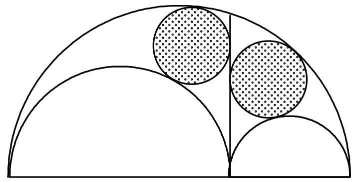
・１次方程式の解の作図

・２次方程式の解の作図 Descartes

・黄金比の値　　　　　　　　など



ヒポクラテスの三角形



アルキメデスの双子円

○方べきの定理の逆から…

・正五角形の作図

・円の作図問題

・最大・最小 パズル 問題 Regiomontanus

・図形の面積等分の作図

・フォイエルバッハの定理 Feuerbach

・九点円の性質 Eul er　　　　　　　など

証明などに興味がある人は時間があるときに調べてみましょう。