図形の性質【２つの円の位置関係】 p.108～109

青チャートA: 例題 98～99

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】２つの円についての位置関係から導かれる特徴を読み取ろう

□２つの円の位置関係

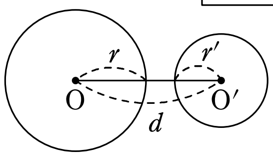
２つの円の位置関係には，下の [1] ～ [5] の場合がある。

図では，円 O の半径を r，円 O′ の半径を r' とし，２つの円の中心間の距離を d とする。ただし，$r > r'$ であるとする。

２つの円の位置関係

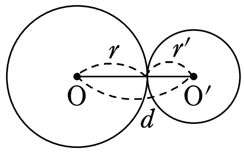
[1]　一方が他方の外部にある

$d > r + r'$　**和より大きい**



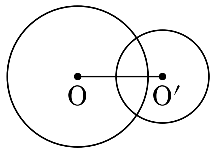
[2]　１点を共有する

$d = r + r'$　**外接＝和と等しい**



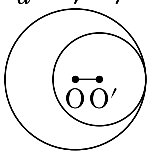
[3]　２点で交わる　**差と和の間**

$r - r' < d < r + r'$



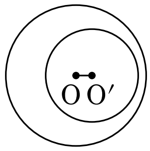
[4]　１点を共有する

$d = r - r'$　**内接＝差と等しい**



[5]　一方が他方の内部にある

$d < r - r'$　**差より小さい**



[2]，[4] のように２つの円がただ１点を共有するとき，２つの円は **接する** といい，この共有点を **接点** という。[2] のように接する場合，２つの円は **外接する** という。[4] のように接する場合，２つの円は **内接する** という。

２つの円が接するとき，接点は２つの円の中心を通る直線上にある。

補足　２つの円のそれぞれの中心を結ぶ直線を「**中心線**」という

内接、外接を基準に位置関係を考えよう

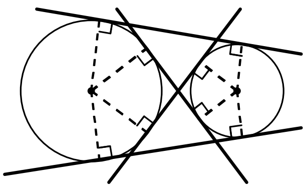
□２つの円の共通接線

２つの円の両方に接する直線を，２つの円の **共通接線** といい，次のような場合がある。

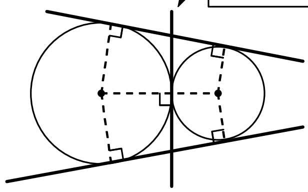
２つの円の共通接線

補足　共通接線の反対側に２つの円があるとき、その共通接線を「**共通内接線**」という

[1]　共通接線　４本

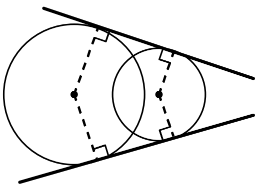


[2]　共通接線　３本

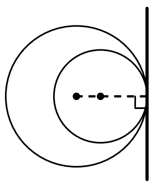


補足　共通接線の同じ側に２つの円があるとき、その共通接線を「**共通外接線**」という

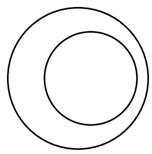
[3]　共通接線　２本



[4]　共通接線　１本



[5]　共通接線はない



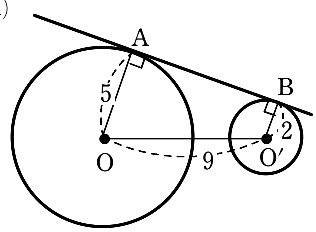
図形の性質【２つの円の位置関係】 p.108～109

青チャートA: 例題 98～99

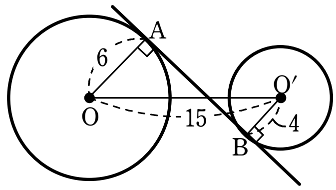
練習２７） 下の図において，直線 AB は円 O，O′ に，それぞれ点 A，B で接している。

線分 AB の長さを求めよ。

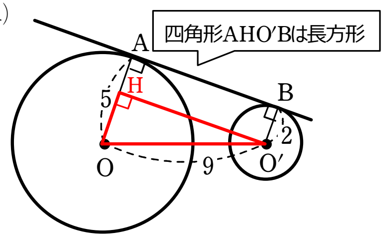
(1)



(2)



解答 (1)



点 O′ から線分 OA に垂線 O′H を下ろすと，

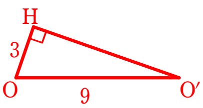
四角形 ABO′H は長方形となり

$AB=HO'$，$HA=O'B$

よって　$OH=OA-HA=5-2=3$

直角三角形 OO′H に

三平方の定理を適用すると



$HO'=\sqrt{OO'^2-OH^2}$

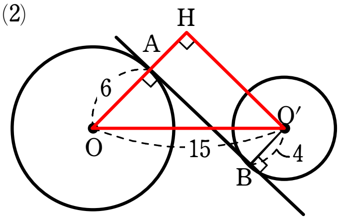
$=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

したがって　$AB=6\sqrt{2}$

参考 共通外接線の長さ

$\sqrt{d^2-(r-r')^2}$

(2)



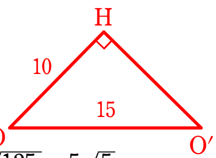
点 O′ から線分 OA の延長に垂線 O′H を下ろすと，四角形 ABO′H は長方形となり

$AB=HO'$，$HA=O'B$

よって　$OH=OA+HA=6+4=10$

直角三角形 OO′H に

三平方の定理を適用すると



$HO'=\sqrt{OO'^2-OH^2}$

$=\sqrt{15^2-10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

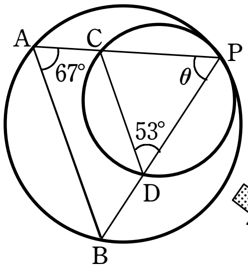
したがって　$AB=5\sqrt{5}$

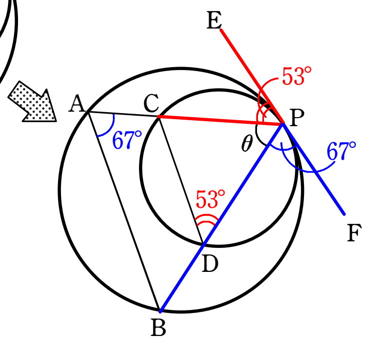
参考 共通内接線の長さ

$\sqrt{d^2-(r+r)^2}$

練習２８） 右の図において，２つの円は点 P で内接している。$\angle PAB=67°$，$\angle PDC=53°$ のとき，

角 θ を求めよ。





解答 図のように，

点 P における２つの円の

共通接線 EF を引くと，

接線と弦の作る角の関係から

$\angle CPE=\angle CDP=53°$

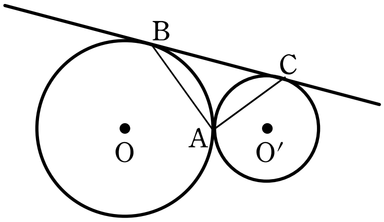
$\angle BPF=\angle BAP=67°$

よって

$\theta=180°-(\angle CPE+\angle BPF)$

$=180°-(53°+67°)=60°$

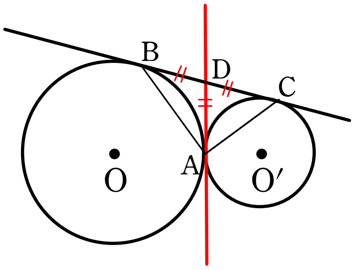
演習問題６） 右の図において，２つの円 O，O′ は点 A で外接している。また，直線 BC は円 O，O′ に，それぞれ 点 B，C で接している。
このとき，$\angle BAC = 90^\circ$ であることを証明せよ。
【青チャート数学Ａ基本例題９９類題】



$\boxed{\text{方針}}$　２つの円の関係として

① 中心線
② 共通弦 …… 特に 交わる２円 …… 中心線で垂直に２等分
③ 共通接線 …… 特に 接する２円 …… 中心線上に接点あり

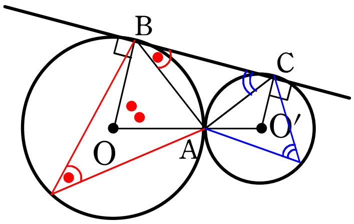
$\boxed{\text{解答}}$ 点 A における共通接線を引き，直線 BC との交点を
D とすると　$DA = DB$，$DA = DC$
よって，点 D は $\triangle ABC$ の外心で，点 A は線分 BC を直径とする円周上にある。
したがって　$\angle BAC = 90^\circ$



(別証) 右の図において

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AO'C$$



$OB /\!/ O'C$ より
$\angle AOB + \angle AO'C = 180^\circ$
よって　$\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$
ゆえに，$\triangle ABC$ において
　$\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$