図形の性質【作図】 p.110～115

青チャートA：例題 100～104

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】作図の基本的な作業から図形で成り立っている性質を読み取ろう

□作図

定規は線を引く道具（距離は測らない）
コンパスは等しい距離をとるための道具
（等しい点の集まりが「円」となる：軌跡）

定規とコンパスだけを用いて，与えられた条件を満たす図形をかくことを **作 図** という。ただし，定規とコンパスを用いる作図とは

[1] 与えられた 2 点を通る直線を引くこと

[2] 与えられた 1 点を中心として，与えられた半径の円をかくこと

だけを使って，直線や円をえがき，それらの直線や円の交点を次々と求めていくことである。これを **作図の公法** という。

（ 中学校で学んだ作図については，教科書の巻末の見返しで復習している）。

□作図題の解

作図題の解は厳密には「**解析**、**作図**、**証明**、**吟味**」の４段階に整理して書く。

しかし簡単な問題では「作図、証明」だけを書く場合も多い。教科書もこれに沿っている。

解析 … 条件を満たす図形がかけたとして、与えられた条件と、求める図形の関係を調べて、作図の手がかりを求める。

作図 … 解析によって得られた手がかりを基にして作図の方法を述べる。

証明 … 作図によって得られた図形が与えられた条件を満たすことを確かめる。

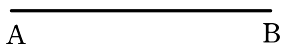
吟味 … 作図がどのような場合に可能なのか、可能だとしたら解がいくつあるかを調べる。

□次の作図を考えてみよう

○ 直線 ℓ 上にない点 P を通り，ℓ に平行な直線　　○ 与えられた線分 AB を 1 辺とする正方形

○ 直線 ℓ 上にない点 P を通り，ℓ に平行な直線

○ 与えられた線分 AB に対して，次の点を作図せよ。



(1) 線分 AB を 2：1 に内分する点 C　　(2) 線分 AB を 1：4 に外分する点 D

○ 長さ 1 の線分 AB と長さ a，b の 2 つの線分が与えられたとき，長さ $\dfrac{b}{a}$ の線分

○ 長さ 1 の線分 AB と，長さ a，b の 2 つの線分が与えられたとき，長さ ab の線分

○ 長さ 1 の線分 AB と，長さ a の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{a}$ の線分

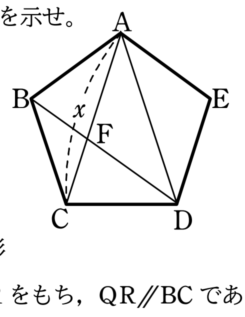
○ 長さ a，b の 2 つの線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{ab}$ の線分を作図せよ。

研究 正五角形 ABCDE の対角線 AC，BD の交点を F とする。次のことを示せ。

(1) $\triangle ACD \backsim \triangle DFC$

(2) CD＝1，AC＝x とすると，x は $x:1=1:(x-1)$ を満たす。

(3) $CD:AC=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



研究 3 本の平行な直線に対して，それぞれの直線上に頂点がある正三角形

研究 鋭角三角形 ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ頂点 P，Q，R をもち，QR∥BC である正三角形 PQR を作図せよ.

研究 長さ 1， a， b の線分が与えられているとき， $x^2-2ax-b=0$ ……(＊) の正の解を作図せよ。

図形の性質【作図】 p.110～115

青チャートA: 例題100～104

□基本的な作図

直線 ℓ 上にない点 P を通り，ℓ に平行な直線を作図してみよう。

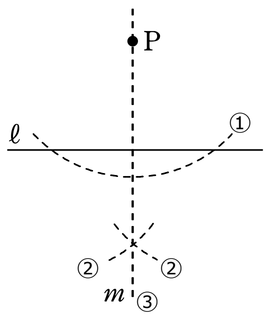
まず，点 P を通る ℓ の垂線 m を作図し，これに続けて次のように作図する。

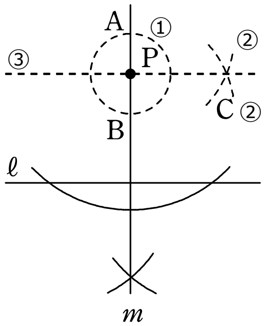
① 点 P を中心とする円をかき，直線 m との交点をそれぞれ A，B とする。

② 2 点 A，B をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかき，それらの交点の 1 つを C とする。

③ 直線 PC を引く。直線 PC が求める直線である。

点 P を通る ℓ の垂線 m





このように作図した直線 PC は，
m に垂直な直線である。
直線 PC と ℓ はともに m に垂直であるから，
直線 PC は ℓ に平行である。

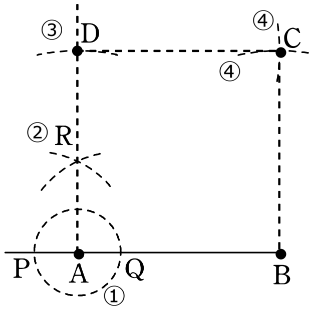
練習２８） 与えられた線分 AB を 1 辺とする正方形を作図せよ。

① 点 A を中心とする円をかき，直線 AB との交点をそれぞれ P，Q とする。

② 2 点 P，Q をそれぞれ中心として，等しい半径の円をかき，
それらの交点の 1 つを R とする。

③ 点 A を中心とする半径 AB の円をかき，直線 AR との
交点の 1 つを D とする。

④ 2 点 B，D をそれぞれ中心として，半径の長さが AB の円をかき，
それらの交点のうち A でない方を C とする。
四角形 ABCD が求める正方形である。



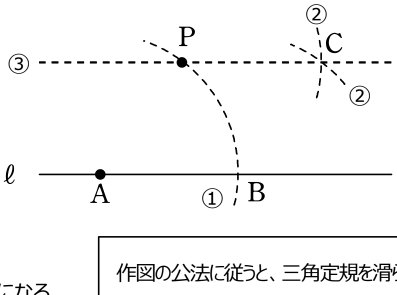
このとき，四角形 ABCD において，∠A は直角で，4 辺が等しい。したがって，四角形 ABCD は正方形である。

直線 ℓ 上にない点 P を通り，ℓ に平行な直線は次のように作図することもできる。

① ℓ 上に点 A をとり，A を中心とする半径 AP の円をかき，ℓ との交点の 1 つをBとする。

② 2 点 P，B をそれぞれ中心として，
半径 AP の円をかき，
A と異なる交点を C とする。

③ 2 点 P，C を通る直線を引く。



ここで，四角形 ABCP は 4 辺の長さが等しいから，
ひし形である。よって，直線 PC は直線 AB すなわち ℓ と平行になる。

作図の公法に従うと、三角定規を滑らせて
平行線をかく方法は作図ではないことになる

図形の性質【作図】 p.110～115

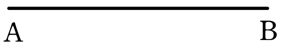
青チャートA：例題100～104

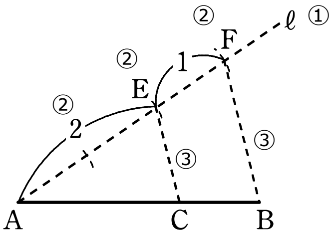
□線分の内分点，外分点の作図

練習３０） 与えられた線分 AB に対して，次の点を作図せよ。

(1) 線分 AB を 2：1 に内分する点 C

(2) 線分 AB を 1：4 に外分する点 D



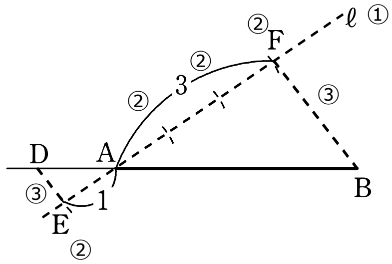


(1) ① 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

② ℓ 上に，AE：EF＝2：1 となるように点 E，F をとる。ただし，E は線分 AF 上にとる。

③ E を通り，直線 BF に平行な直線を引き，線分 AB との交点を C とする。点 C が求める点である。

BF∥CE より AC：CB＝AE：EF であるから，点 C は線分 AB を 2：1 に内分する点である。



(2) ① 点 A を通り，直線 AB と異なる直線 ℓ を引く。

② ℓ 上に，EA：AF＝1：3 となるように点 E，F をとる。ただし，A が線分 EF 上にあるようにとる。

③ E を通り，直線 BF に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とする。点 D が求める点である。

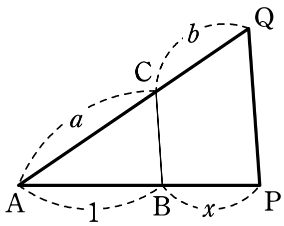
BF∥ED より AD：DB＝AE：EF であるから，点 D は線分 AB を 1：4 に外分する点である。

□いろいろな長さの線分の作図

右の図の △APQ について，BC∥PQ であるとする。線分の長さが図のように与えられたとき，x の値を求めよう。平行線と線分の比の性質により

$1：x＝a：b$ すなわち $ax＝b$ これを解いて $x=\dfrac{b}{a}$

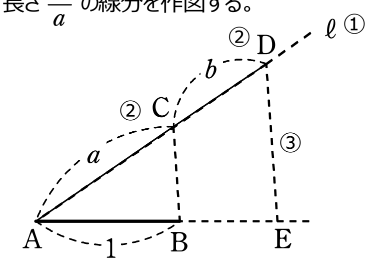
このことを利用した作図について考えよう。



数の世界での乗法・除法 ⇔ 図形の世界での拡大・縮小

つまり相似比などが手がかりとなる

例２） 長さ 1 の線分 AB と長さ a，b の 2 つの線分が与えられたとき，長さ $\dfrac{b}{a}$ の線分を作図する。



① 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

② ℓ 上に，AC＝a，CD＝b となるように点 C，D をとる。ただし，C は線分 AD 上にとる。

③ D を通り，直線 BC に平行な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。線分 BE が求める線分である。

BE＝x とすると，BC∥ED から $1：x＝a：b$ すなわち $x=\dfrac{b}{a}$

よって，線分 BE は長さ $\dfrac{b}{a}$ の線分である。 終

図形の性質【作図】 p.110～115

青チャートA: 例題 100～104

練習３１） 長さ１の線分 AB と，長さ a，b の２つの線分が与えられたとき，長さ ab の線分を作図せよ。

① 点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

② ℓ 上に，AC＝a となる点 C をとる。

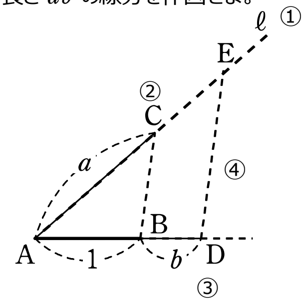
③ 半直線 AB の B を越える延長上に BD＝b となる点 D をとる。

④ D を通り，直線 BC に平行な直線を引き，

ℓ との交点を E とする。線分 CE が求める線分である。

CE＝x とすると，BC∥DE から　$1:b=a:x$　すなわち　$x=ab$

よって，線分 CE は長さ ab の線分である。



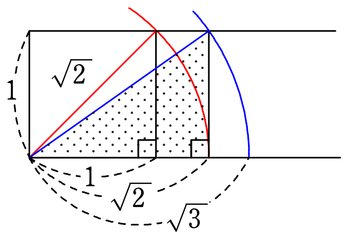
別解　a と b が逆になっても良い

補足 例２や練習３１は，作図によって，２つの正の数 a，b について商 $\dfrac{b}{a}$，積 ab の計算を行うことと考えられる。

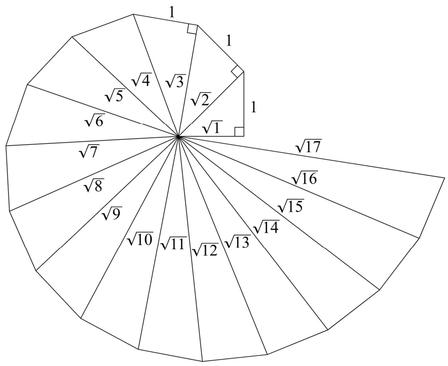
次に，長さが無理数で表される線分について，作図を考えてみよう。

たとえば，１辺の長さが１の正方形を作図すると，その対角線として長さ $\sqrt{2}$ の線分が作図できる。さらに，右の図の赤い直角三角形に三平方の定理を用いると，斜辺に長さ $\sqrt{3}$ の線分が作図できる。

同様にして，自然数 n に対して長さ $\sqrt{n}$ の線分が作図できる。



参考 テオドロスの螺旋は、キュレネのテオドロスの名を冠する、高さが１、底辺が前の直角三角形である直角三角形の渦巻である。
底辺と高さが１である直角二等辺三角形から始まる。次の三角形を、底辺が前の直角三角形の斜辺、高さが１である、先の直角三角形の外側にある直角三角形とする。以後、一般に $(n-1)$ 回目の直角三角形の外側に、その三角形の長さ $\sqrt{n}$ の斜辺を底辺、斜辺と高さの間の点を直角とする、高さ1の直角三角形を作り続けたものである。



例題４） 長さ１の線分 AB と，長さ a の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{a}$ の線分を作図せよ。

解答 ① 半直線 AB の B を越える延長上に BC＝a となる点 C をとる。

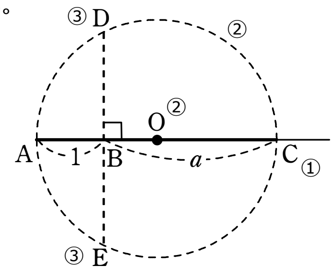
② 線分 AC の垂直二等分線とAC との交点を O とし，O を中心として，半径 OA の円 O をかく。

③ B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。線分 BD が求める線分である。

このとき，方べきの定理により　BA・BC＝BD・BE

AB＝1，BC＝a，BD＝BE であるから　$\mathrm{BD}^2=a$

よって，線分 BD は長さ $\sqrt{a}$ の線分である。



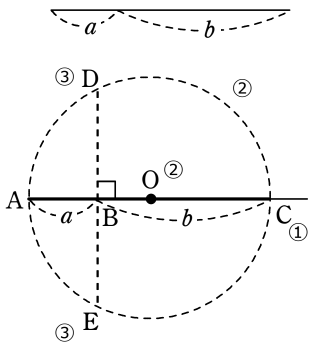
深める　AC を直径に設定したのは何故だろうか。

⇒　BD＝BE より方べきの定理を用いたときに平方数になる

図形の性質【作図】 p.110～115

青チャートA: 例題100～104

練習３２） 長さ a，b の２つの線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{ab}$ の線分を作図せよ。



解答 ① 長さ a の線分を AB とし，半直線 AB の B を越える延長上に BC＝b となる点 C をとる。

② 線分 AC の垂直二等分線と AC の交点を O とし，O を中心として半径 OA の円をかく。

③ B を通り，直線 AB に垂直な直線を引き，円 O との交点を D，E とする。線分 BD が求める線分である。

このとき，方べきの定理により　BA・BC＝BD・BE

AB＝a，BC＝b，BD＝BE であるから　$\mathrm{BD}^2=ab$

よって，線分 BD は長さ $\sqrt{ab}$ の線分である。

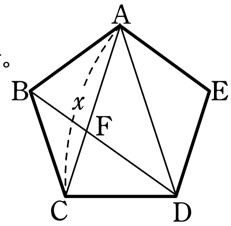
> 正の数 a, b について，
>
> 積 ab，商 $\dfrac{b}{a}$，平方根 $\sqrt{a}$ の長さの線分が作図できることから
>
> これらを組み合わせて２次方程式の解が作図できることになる。

図形の性質【作図】 p.110～115

青チャートA: 例題100～104

研究 正五角形の作図

正五角形では，1 辺の長さと対角線の長さの比が $1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。



練習１） 正五角形 ABCDE の対角線 AC，BD の交点を F とする。次のことを示せ。

(1) $\triangle \mathrm{ACD} \backsim \triangle \mathrm{DFC}$

(2) $\mathrm{CD}=1$，$\mathrm{AC}=x$ とすると，x は $x:1=1:(x-1)$ を満たす。

(3) $\mathrm{CD}:\mathrm{AC}=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(1) 正五角形は円に内接し，$\mathrm{CD}=\mathrm{BC}$ から，円周角の定理により　$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BDC}$

よって　$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{FDC}$

同様に，円周角の定理により，$\angle\mathrm{CAD}$，$\angle\mathrm{ADB}$，$\angle\mathrm{ACE}$，$\angle\mathrm{ECD}$ はすべて等しいから

$\angle\mathrm{DFC}=\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACE}+\angle\mathrm{ECD}=\angle\mathrm{ACD}$

$\triangle\mathrm{ACD}$ と $\triangle\mathrm{DFC}$ において，2 組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle\mathrm{ACD}\backsim\triangle\mathrm{DFC}$

(2) $\triangle\mathrm{AFD}$，$\triangle\mathrm{DFC}$ はともに二等辺三角形であり　$\mathrm{FA}=\mathrm{FD}=\mathrm{CD}=1$

よって　$\mathrm{FC}=\mathrm{AC}-\mathrm{FA}=x-1$

$\triangle\mathrm{ACD}\backsim\triangle\mathrm{DFC}$ より，$\mathrm{AC}:\mathrm{DF}=\mathrm{CD}:\mathrm{FC}$ であるから　$x:1=1:(x-1)$

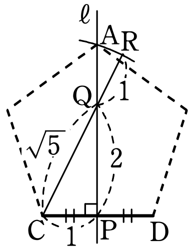
(3) $x:1=1:(x-1)$ から　$x(x-1)=1^2$

整理して　$x^2-x-1=0$　　これを解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ から　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\mathrm{CD}:\mathrm{AC}=1:x=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

長さ 2 の線分 CD が与えられたとき，正五角形 ABCDE を作図してみよう。

まず，対角線 AC の長さが $1+\sqrt{5}$ であることを利用して，頂点 A を次のように作図する。



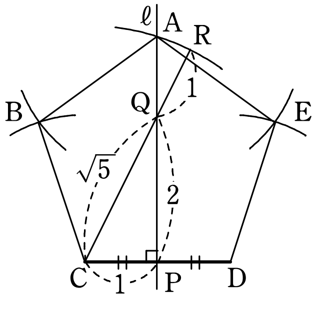
① 線分 CD の垂直二等分線 ℓ を引き，ℓ と CD の交点を P とする。

② ℓ 上に $\mathrm{PQ}=\mathrm{CD}$ となるような点 Q をとる。

③ 線分 CQ の Q を越える延長上に，$\mathrm{QR}=\mathrm{CP}$ となるような点 R をとる。

④ C を中心として半径 CR の円をかき，ℓ との交点を A とする。

このとき，$\mathrm{CQ}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\mathrm{CA}=\mathrm{CR}=1+\sqrt{5}$ である。



⑤ A を中心として半径 2 の円，C を中心として半径 2 の円をかき，それらの交点のうち AC に関して D の反対側にあるものを B とする。

⑥ A を中心として半径 2 の円，D を中心として半径 2 の円をかき，それらの交点のうち AD に関して C の反対側にあるものを E とする。

五角形 ABCDE が求める正五角形である。

補足 他にも正五角形を作図する方法はいくつかある

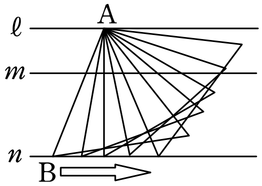
図形の性質【作図】 p.110～115

青チャートA: 例題100～104

研究　図形描画ソフトを活用して作図の方針を立てる

与えられた 3 本の平行な直線に対して，頂点がそれぞれの直線上にあるような正三角形を作図する方法を考えよう。

3 本の平行な直線 ℓ，m，n に対して，それぞれの直線上に頂点がある正三角形 ABC を作図したいとする。図形描画ソフトを活用して次の ①，② のように正三角形をいくつかかくと，右の図のようになった。



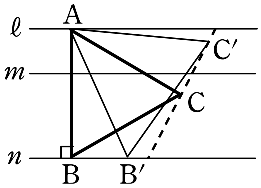
① 直線 ℓ 上に点 A を，直線 n 上に点 B をとる。

② A は固定して，B は直線 n 上を動かして線分 AB を 1 辺とする正三角形をかく。

このとき，正三角形の残りの頂点の動きには，規則性があるようにも見える。

3 本の平行線上に
頂点をもつ正三角形

練習 1） 上の考察より，正三角形の残りの頂点は，直線上にあることが予想される。このことを，右の 2 つの正三角形 ABC，AB′C′ の図を利用して説明せよ。



解説　△ABB′ と △ACC′ において

$\angle BAB' = 60^\circ - \angle B'AC = \angle CAC'$

また，AB＝AC，AB′＝AC′ より，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから　△ABB′≡△ACC′

このことと $\angle ABB' = 90^\circ$ から，$\angle ACC' = 90^\circ$ である。

これは，点 B′ を直線 n 上のどこにとっても成り立つ。

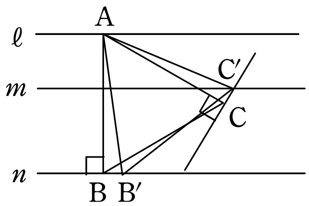
したがって，正三角形の残りの頂点は，点 C を通り 辺 AC に垂直な直線上にある。

上の練習 1 の結果を利用すると，3 本の平行な直線 ℓ，m，n に対して，それぞれの直線上に頂点がある正三角形 ABC を作図することができる。

練習 2） 3 本の平行な直線に対して，それぞれの直線上に頂点がある正三角形を作図せよ。

解説　① 3 本の平行な直線を ℓ，m，n とする。

直線 ℓ 上に点 A をとり，A を通り ℓ に垂直な直線と直線 n の交点を B とする。



② 線分 AB を 1 辺とする正三角形 ABC をかく。

③ 点 C を通り辺 AC に垂直な直線と直線 m の交点を C′ とする。

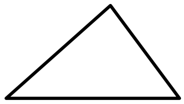
④ 線分 AC′ を 1 辺とする正三角形 AB′C′ を，点 B′ が直線 n 側にあるようにかく。

正三角形 AB′C′ が求める正三角形である。

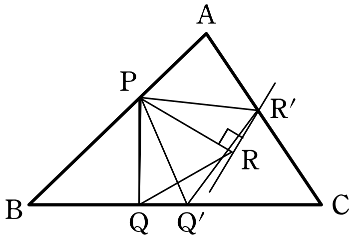
△ABB′≡△ACC′ と $\angle ACC' = 90^\circ$ から，$\angle ABB' = 90^\circ$ である。よって，点 B′ は直線 n 上にある。

したがって，正三角形 AB′C′ は，3 本の平行な直線 ℓ，m，n 上に頂点がある正三角形である。

練習３） 右の図の三角形に対して，3 辺それぞれの辺上に頂点がある正三角形を 1 つ作図せよ。



解説 ① 与えられた三角形の 3 つの頂点を A，B，C とする。
辺 AB 上に点 P をとり，P を通り辺 BC に垂直な直線と BC の交点を Q とする。



② 線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR をかく。

③ 点 R を通り辺 PR に垂直な直線と辺 AC の交点を R′ とする。

④ 線分 PR′ を 1 辺とする正三角形 PQ′R′ を，点 Q′ が辺 BC 側にあるようにかく。正三角形 PQ′R′ が求める正三角形である。

△PQQ′≡△PRR′ と ∠PRR′＝90° から，∠PQQ′＝90° である。

よって，点 Q′ は辺 BC 上にある。

したがって，正三角形 PQ′R′ は，△ABC の 3 つの辺上に頂点がある正三角形である。