図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題105～109

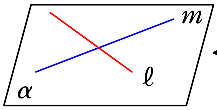
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】空間内の直線や平面の位置関係について理解しよう

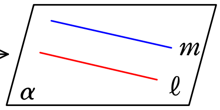
□２直線の位置関係

異なる 2 直線 ℓ，m の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

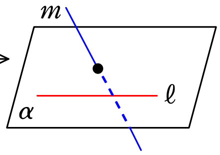
[1] 1 **点で交わる**　　[2] **平行である**　　[3] **ねじれの位置にある**



同一平面上にある

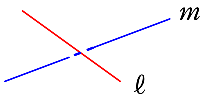


同一平面上にない



2 **直線 ℓ，m が平行であるとき，$\ell /\!/ m$ と書く。**

注意 2 直線 ℓ，m が一致する場合も，$\ell /\!/ m$ であると考えることにする。

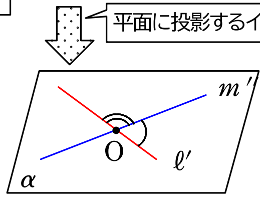


3 直線 ℓ，m，n について，次のことが成り立つ。

『$\ell /\!/ m$，$m /\!/ n$ **ならば** $\ell /\!/ n$』

ℓ と m，m と n が平行なら ℓ と n も平行といっても良い

平面に投影するイメージ



2 直線 ℓ，m が平行でないとき，任意の 1 点 O を通り，ℓ，m に平行な直線を，それぞれ ℓ'，m' とすると，ℓ' と m' は 1 つの平面上にある。

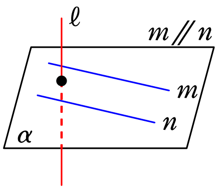
このとき，ℓ' と m' のなす 2 つの角は，点 O のとり方によらず一定である。

この角を **２直線 ℓ，m のなす角** という。（普通は 0° 以上 90° 以下の方を考える）

2 直線 ℓ，m のなす角が直角のとき，ℓ と m は **垂直** であるといい，$\ell \perp m$ と書く。

垂直な 2 直線 ℓ と m が交わるとき，ℓ と m は **直交** するという。

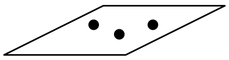
また，次のことが成り立つ。



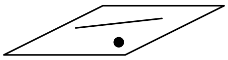
平行な２直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直である。

平面の決定条件

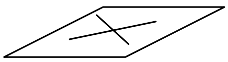
いずれかの条件を満たすとき，それらを通るような平面がただ一つに定まる



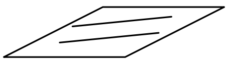
一直線上にない３点



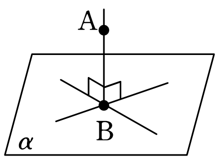
１つの直線とその上にない１点



交わる２直線



平行な２直線

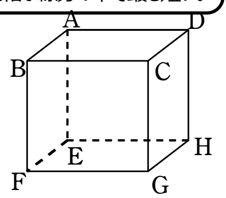


平面α上にない点Aから平面αにひいた垂線と平面Pとの交点をBとするとき、線分ABの長さは、点Aと平面α上の点を結ぶ線分の中で最も短い。

練習３４） 右の図の立方体 ABCD − EFGH について，

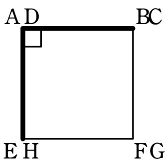
次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。　ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

(1) AB，DH　　(2) AB，EG　　(3) AC，FH

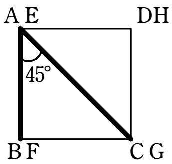


解答 (1) 90°　　(2) 45°　　(3) 90°

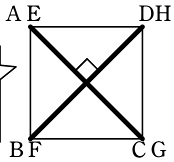
横から見る



上から見る



上から見る

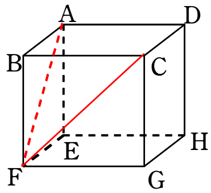


点が重なって見える

図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題 105～109

深める　練習３４ の立方体において，
2 直線 AF，CF のなす角 θ を求めよう。
ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

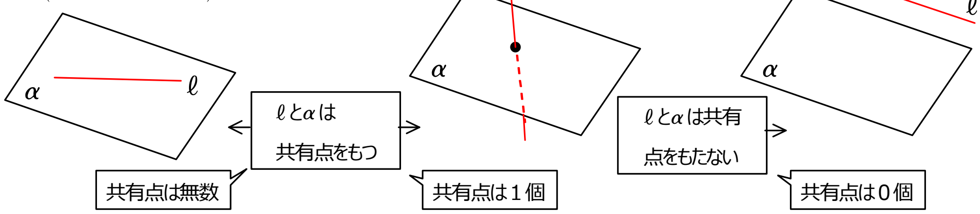


□直線と平面の位置関係

直線 ℓ と平面 α の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

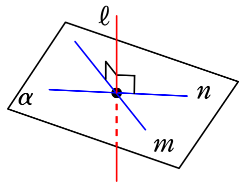
[1]　**ℓ は α に含まれる**　　[2]　**1 点で交わる**　　[3]　**平行である**

(ℓ は α 上にある)



直線 ℓ と平面 α が平行であるとき，$\ell /\!/ \alpha$ と書く。

直線 ℓ が，平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，
ℓ は α に **垂直** である，または ℓ は α に **直交** するといい，$\ell \perp \alpha$ と書く。
このとき，ℓ を平面 α の **垂線** という。 直線と平面の垂直について，
次が成り立つことが知られている。



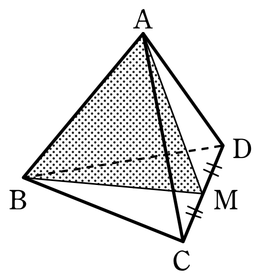
すべての直線を調べなくてもよいということ

直線 ℓ が，平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である

練習３５） 正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とする。

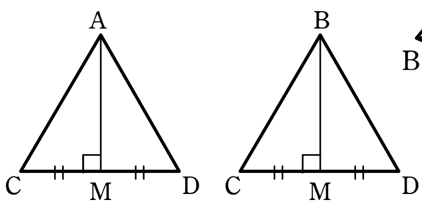
(1)　辺 CD は平面 ABM に垂直であることを示せ。

(2)　(1) から，AB⊥CD であることを示せ。



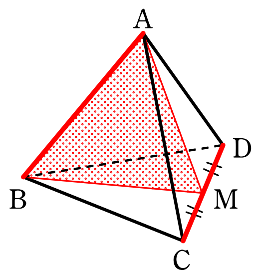
解答

(1)　正三角形 ACD において，
　　AM⊥CD であり，
　正三角形 BCD において，
　　BM⊥CD である。



よって，辺 CD は平面 ABM 上の 2 直線 AM，BM に垂直である
から，辺 CD は平面 ABM に垂直である。

(2)　(1) から，辺 CD は平面 ABM 上のすべての直線に垂直である。
　辺 AB は平面 ABM 上にあるから　　AB⊥CD



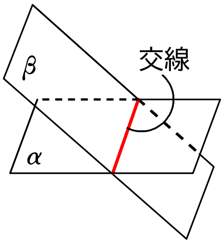
図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題 105～109

□ 2 平面の位置関係

異なる 2 平面 α，β の位置関係には，次の 2 つの場合がある。

[1] 交わる



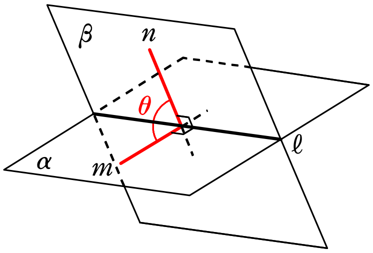
[2] 平行である

2 平面が交わるとき，その交わりは直線になり，その直線を **交線** という。
2 平面 α，β が平行であるとき，$\alpha /\!/ \beta$ と書く。

注意 2 平面 α，β が一致する場合も，$\alpha /\!/ \beta$ であると考えることにする。

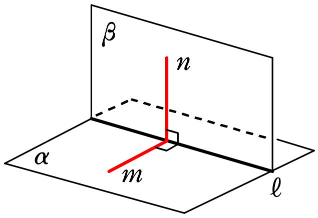
交わる 2 平面の交線上の点から，各平面上で，交線に垂直に引いた 2 直線のなす角（の小さい方）を **2 平面のなす角** という。

2 平面 α，β のなす角が直角のとき，α と β は **垂直** である，または **直交** するといい，$\alpha \perp \beta$ と書く。



2 平面の垂直について，次のことが成り立つ。

平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。



練習36) 空間内の異なる 3 つの平面 α, β, γ と異なる 2 つの直線 ℓ, m について，次の記述は正しいか。
常には正しくない場合，その理由も述べよ。

「常には正しくない」とは「正しい例もあり、正しくない例もある」という意味であり、いつも正しいわけではない

(1) $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$ ならば, $\alpha /\!/ \gamma$ である。

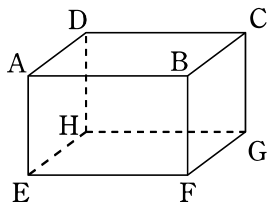
(2) $\alpha \perp \beta$, $\beta /\!/ \gamma$ ならば, $\alpha \perp \gamma$ である。

(3) $\ell \perp m$, $\ell /\!/ \alpha$ ならば, $m \perp \alpha$ である。

(4) $\ell /\!/ \alpha$, $\ell /\!/ \beta$ ならば, $\alpha /\!/ \beta$ である。

(5) $\ell \perp \alpha$, $\ell /\!/ \beta$ ならば, $\alpha \perp \beta$ である。

解答 (1) 正しくない。
右の図のような直方体において，
(面 ABCD)$\perp$(面 AEFB)，(面 AEFB)$\perp$(面 BFGC)
であるが，面 ABCD と面 BFGC は平行でない。



(2) 正しい。

(3) 正しくない。
(1) の直方体において，AB$\perp$BC，AB$/\!/$(面 EFGH)
であるが，BC と 面 EFGH は垂直でない。

(4) 正しくない。
(1) の直方体において，AB$/\!/$(面 EFGH)，AB$/\!/$(面 DHGC) であるが，
面 EFGH と面 DHGC は平行でない。

(5) 正しい。

図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題105～109

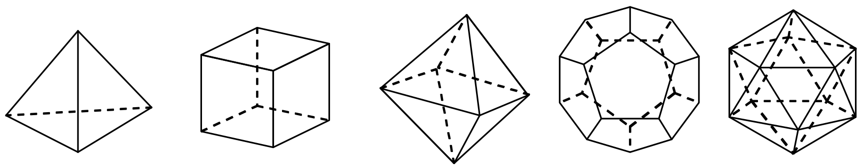
三角錐，四角柱などのように，多角形の面で囲まれた立体を **多面体** といい，へこみのない多面体を **凸多面体** という（凸多面体では，面上のどの 2 点を結ぶ線分も，立体に含まれる。）

□多面体

次の[1]，[2]を満たす凸多面体を **正多面体** という。

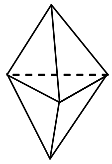
[1] **各面はすべて合同な正多角形である。**　[2] **各頂点に集まる面の数はすべて等しい。**

正多面体は，次の **5 種類しかない**ことが知られている。



正四面体　正六面体(立方体)　正八面体　正十二面体　正二十面体

$\boxed{\text{深める}}$ 右のように正四面体を 2 つはり合わせた六面体（デルタ六面体）が正多面体でないことを説明しよう。



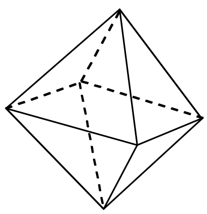
⇒ 「[2] 各頂点に集まる面の数はすべて等しい」を満たしていないため

練習３７） 5 種類の正多面体について，次の表を完成させよ。

正多面体	面の数	面の形	１頂点に集まる面の数	頂点の数	辺の数
正四面体	4	正三角形	3	4	6
正六面体	6	正方形	3	8	１２
正八面体	8	正三角形	4	6	１２
正十二面体	１２	正五角形	3	２０	３０
正二十面体	２０	正三角形	5	１２	３０

掛けて…　頂点に集まる面の数で割ると　２で割ると

例３） 正八面体の面の数，頂点の数，辺の数を調べる。



面の数は　8　頂点の数は　$\underbrace{8}_{\text{面の数}}\times\underbrace{3}_{\text{1つの面の頂点の数}}\div\underbrace{4}_{\text{1つの頂点に集まる面の数}}=6$

辺の数は　$\underbrace{8}_{\text{面の数}}\times\underbrace{3}_{\text{1つの面の辺の数}}\div\underbrace{2}_{\text{1つの辺に集まる面の数}}=12$

図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題105～109

たとえば，正八面体について (頂点の数)－(辺の数)＋(面の数) を計算すると，

$6-12+8=2$ となる。 一般に，凸多面体の頂点の数を v，

辺の数を e，面の数を f とすると

$$\boxed{v-e+f=2}$$

$vertex$(点)，$edge$(辺)，$face$(面)と 次元の小さい順に並び、符号は＋－＋の順	$v-e+f$ を オイラー数と呼ぶ

が成り立つことが知られている。これを **オイラーの多面体定理** という。

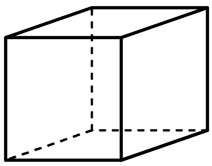
語呂合わせとしては

この順番を変えると　$e=v+f-2$「線は帳面に引け」

帳面：ものを書くために紙をとじて作った冊子。ノート。また、広く帳簿のこと。

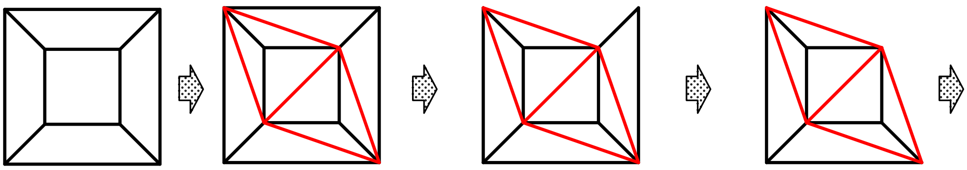
この順番を変えると　$f-e+v=2$「フェブラリーは２月」スペルは違うので注意すること（February）

補足　３次元の図形を２次元の平面グラフとして考えると…



面をゴム膜のように伸び縮みするものとみる。
そこで底面となる面を１つ決め取り除き，
押しつぶして平面図形に変形する。
（このとき頂点と辺，面の関係性は崩れないものとする）

レオンハルト・オイラー
Leonhard Euler
1707～1783
スイスの数学者・天体物理学者



面が一つ減ったので
$v-e+(f-1)=2$
$\therefore v-e+f=1$
これを示せばよい

辺を加えて三角形に統一する
$v-(e+5)+(f+5)=1$
$\therefore v-e+f=1$

1辺を取り除くと面も減るので
$v-(e-1)+(f-1)=1$
$\therefore v-e+f=1$

2辺を取り除くと頂点も面も減るので
$(v-1)-(e-2)+(f-1)=1$
$\therefore v-e+f=1$

どちらの操作をしても関係式は変わらず，最終的に三角形まで至る
$\therefore v-e+f=1$

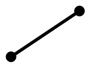
三角形は，頂点3，辺3，面1 であるから

$$v-e+f=1$$

が成り立つ。

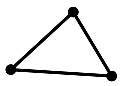
●忘れたときは…

１次元



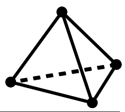
１＝点－辺
1　2　1

２次元



１＝点－辺＋面
1　3　3　1

３次元



１＝点－辺＋面－体
1　4　6　4　1

パスカルの三角形にもなっている

各次元の右端は必ず1
よって
２＝点－辺＋面

図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題105～109

練習３９） 次の多面体についても，上の等式 ①が成り立つことを確かめよ。

解答 かどを切り取ってできた多面体は，四角形が 6 つ，三角形が 8 つでできている。

面の数は　$6+8=14$

1 つの頂点に 4 つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$$(6\times4+8\times3)\div4=12$$

1 つの辺に 2 つの面が集まっているから，求める辺の数は

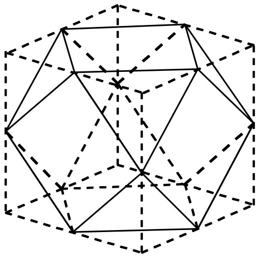
$$(6\times4+8\times3)\div2=24$$

頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

$$f-e+v=14-24+12=2$$

よって，等式 $f-e+v=2$ が成り立つ。

立方八面体
（準正多面体の一つ）

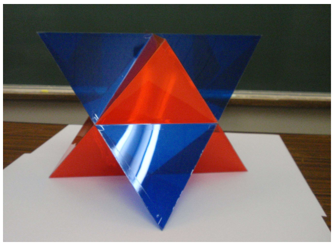


「どれか２つが分かれば、
残り１つは計算で求められる」ということ

解答 面の数　24，　頂点の数　14，　辺の数　36

$24-36+14=2$　となり

オイラーの多面体定理が成り立つ。



ケプラーの八角星

解答 12 個の正五角形の頂点の数は　5×12

20 個の正六角形の頂点の数は　6×20

1 つの頂点に 3 つの面が集まっているから，

求める頂点の数は

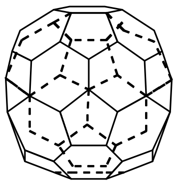
$$\frac{5\times12+6\times20}{3}=60$$

12 個の正五角形の辺の数は　5×12

20 個の正六角形の辺の数は　6×20

1 つの辺に 2 つの面が集まっているから，

求める辺の数は　$\dfrac{5\times12+6\times20}{2}=90$



正五角形が 12 個，
正六角形が 20 個
でできている
凸多面体

別解 頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから

$$5\times12=60$$

辺の数を e とすると，オイラーの多面体定理により

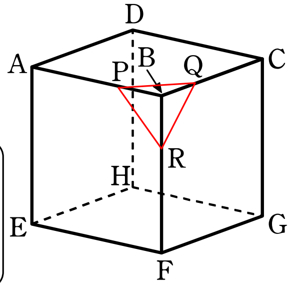
$$60-e+(12+20)=2$$

よって　$e=90$

図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA：例題 105～109

□多面体からかどを切り取った多面体

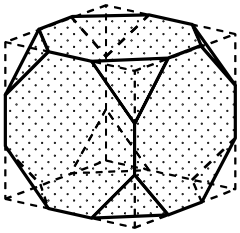


右の図の正六面体 ABCD－EFGH のかどを，次のように切り取ることを考えましょう。

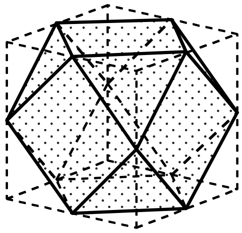
> 1 つの頂点に対して，その頂点に集まる辺上に，頂点から等距離の点をとり，それらを通る平面で立体のかどを切り取る。
> さらに，立体のすべての頂点において，同じ方法でかどを切り取る。(※)

かどから切り取る部分が大きくなると，(※) によって新しくできる立体は，次の図のようになります。

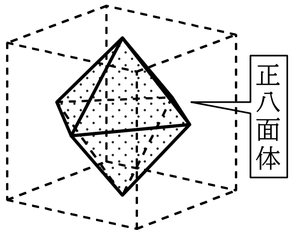
① P が B に近い



② PB＝PA



③ P が A に一致する



逆に，正八面体のかどを (※) のように切り取ることを考えます。

切り取る部分が大きくなると，上の ② の立体を経由して正六面体に至ります。このような関係を

正六面体 ←→ ② の立体 ←→ 正八面体

双対多面体といったりします

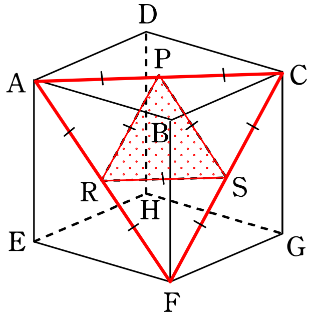
と書くとすると，ほかの立体については，次のようになります。

正四面体 ←→ 正八面体 ←→ 正四面体

正十二面体 ←→ 切頂二十面体（サッカーボール型） ←→ 正二十面体

立方体の角を切り取ってできる立体

③は正八面体であることを示そう。



[1] 立体 PRSTUQ の面 PRS は平面 AFC上にあって，

点 P，R，S はそれぞれ線分 CA，AF，FC の中点である。

CA ＝AF ＝FC より △AFC は正三角形である。

よって，PR ＝RS ＝SP であるから，△PRS も正三角形である。

同様に考えると，

立体 PRSTUQ のすべての面が合同な正三角形である。

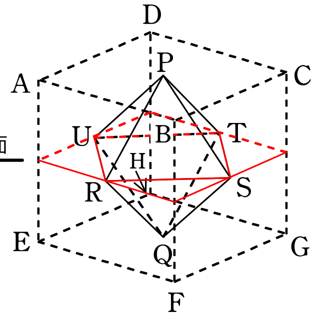
[2] 6 つの頂点に集まる正三角形の数はすべて 4 で等しい。

[1]，[2] から，立体 PRSTUQ は正八面体である。

□正多面体の体積

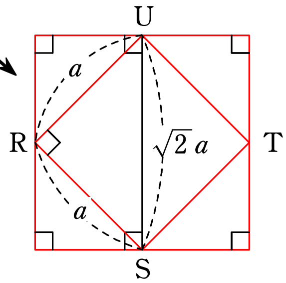
立方体の角を切り取ってできる立体

正六面体ABCD－EFGH から切り取った正八面体PRSTUQ を利用して，正八面体の体積を求めよう。



正八面体 PRSTUQ の 1 辺の長さを aとする。

平面 RSTU で正六面体を切ったときの断面は，右の図のようになる。
四角形 RSTU は，1 辺の長さが a の正方形であるから，
正六面体の 1 辺の長さは $\sqrt{2}\,a$ である。
また，正四角錐 PRSTU，QRSTU の高さはともに正六面体の 1 辺の長さの半分である。

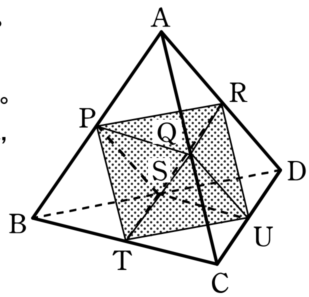


したがって，1 辺の長さが a の正八面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

(正八面体)＝$\frac{1}{3}$・(底面積)・(高さ)×(上下 2 つ)

深める　練習 40 のように，正四面体 ABCD を 4 つの平面で切る。
このとき，次のことを考えてみよう。
(1)　切り取った立体 APQR は正四面体であることを示そう。
(2)　正四面体 ABCD から切り取った正八面体 PQRSTU は，もとの正四面体の半分の体積をもつことを示そう。



解答　正四面体 ABCD の 1 辺の長さを a とする。

(1)　[1]　立体 APQR について

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=\frac{1}{2}a$$

$$\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\frac{1}{2}a,\ \mathrm{QR}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=\frac{1}{2}a,\ \mathrm{RP}=\frac{1}{2}\mathrm{DB}=\frac{1}{2}a$$

よって，△APQ，△AQR，△ARP，△PQR はすべて合同な正三角形である
すなわち，立体 APQR のすべての面は合同な正三角形である。
[2]　4 つの頂点に集まる面の数はすべて 3 で等しい。
[1], [2] から，立体 APQR は正四面体である。

(2)　正四面体 ABCD と正四面体 APQR は相似であり，相似比は　$1:\frac{1}{2}=2:1$

よって体積比は　$2^3:1^3=8:1$

図形の性質【空間図形】 p.118～126

研究　正四面体の種類

研究　正多面体が存在するためには，次のことが必要である。

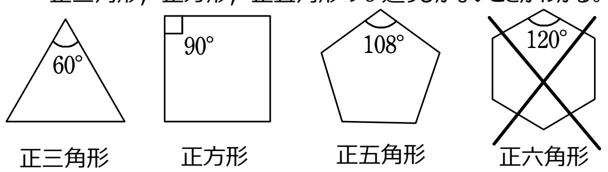
[1]　1 つの頂点に集まる面の数が 3 以上である。

[2]　1 つの頂点に集まる角の大きさの和は 360° より小さい。

このことから，正多面体の面になることのできる正多角形は，

正三角形，正方形，正五角形の 3 通りしかないことがわかる。

正多面体



正六角形の頂点を
3 個集めると，
平面になる。

例 1 ） 各面が正五角形である正多面体の面の数

各面が正五角形である正多面体の頂点，辺，面の数を，それぞれ v，e，f とする。

正五角形の 1 つの内角は 108° であることと，上の [1]，[2] の条件により

1 つの頂点に集まる面の数は 3 であるから　$v=\dfrac{5f}{3}$　…… ①

1 つの辺に集まる面の数は 2 であるから　$e=\dfrac{5f}{2}$　…… ②

①，② を $v-e+f=2$ に代入すると

$$\frac{5f}{3}-\frac{5f}{2}+f=2 \qquad \text{よって} \qquad f=12$$

したがって，各面が正五角形である正多面体が存在すれば，その面の数は 12 である。　終

練習 1 ）　例 1 にならって，次のことを説明せよ。

(1)　各面が正方形である正多面体が存在すれば，その面の数は 6 である。

解答　各面が正方形である正多面体の頂点，辺，面の数を，それぞれ v，e，f とする。

正方形の 1 つの角は 90° であることより，1 つの頂点に集まる面の数は 3 であるから

$$v=\frac{4f}{3} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

1 つの辺に集まる面の数は 2 であるから　$e=\dfrac{4f}{2}=2f$　…… ②

①，② を $v-e+f=2$ に代入すると　$\dfrac{4f}{3}-2f+f=2$

よって　$f=6$

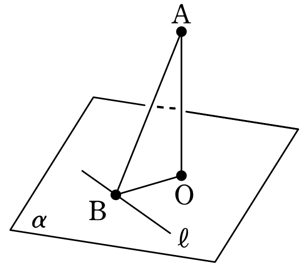
したがって，各面が正方形である正多面体が存在すれば，その面の数は 6 である。

図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題105～109

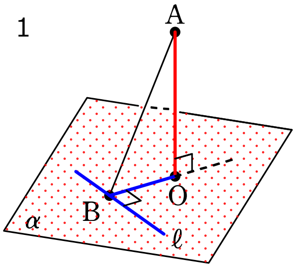
□三垂線の定理【青チャート基本例題１０６補足】

平面 α とその上の直線 ℓ がある。このとき，α 上にない点 A，α 上にあるが ℓ 上にない点 O，および ℓ 上の点 B について，次の **三垂線の定理** が成り立つ。

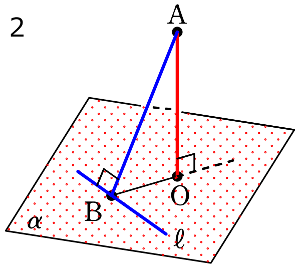


> 三垂線の定理
>
> 1　$OA\perp\alpha$，$OB\perp\ell$　ならば　$AB\perp\ell$
>
> 2　$OA\perp\alpha$，$AB\perp\ell$　ならば　$OB\perp\ell$
>
> 3　$OB\perp\ell$，$AB\perp\ell$，$OA\perp OB$　ならば　$OA\perp\alpha$

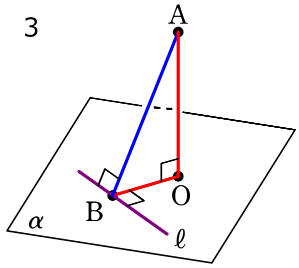
1



2



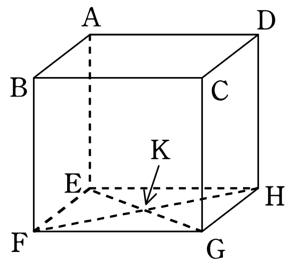
3



例） 右の図の立方体 ABCD－EFGH について，

次のことを証明せよ。

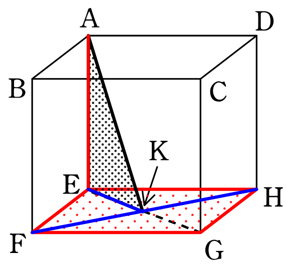
(1)　$AK\perp FH$　　　　(2)　$AG\perp BD$



(1)　$AE\perp$(面 EFGH)

四角形 EFGH は正方形であるから　$EK\perp FH$

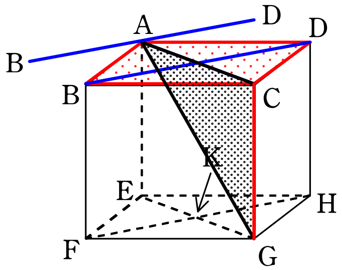
三垂線の定理により　$AK\perp FH$



(2)　$CG\perp$(面 ABCD)

四角形 ABCD は正方形であるから　$CA\perp BD$

三垂線の定理により　$AG\perp BD$



図形の性質【空間図形】 p.118～126

青チャートA: 例題105～109

参考 準正多面体・半正多面体

※ 正多面体はすべての面が合同で，どの頂点にも同じ数の面が集まる凸多面体であるが，
この条件をゆるめると新たな立体を考えることができる。
次の[1]と[2]が成り立つ凸多面体を 準正多面体 という。

[1] 各面は正多角形からできている。

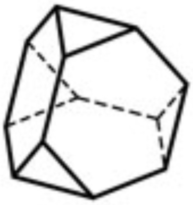
(ゆるめたところ)正多角形は1種類でなくてもよい
⇒準正多面体(quasi−regular polyhedron)
立方八面体と二十面十二面体の2種類のみ

[2] 各頂点のまわりの状態がすべて同じ。

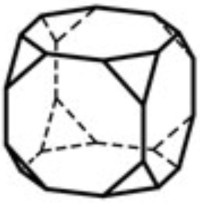
(さらにゆるめたところ)各頂点に集まる正多角形の種類(数)と順序が同じ⇒半正多面体(semi−regular polyhedron, アルキメデスの立体)は13種類に

準正多面体・半正多面体には，次のようなものがある。

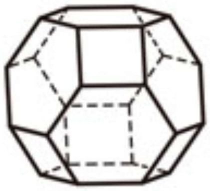
① 切頂四面体



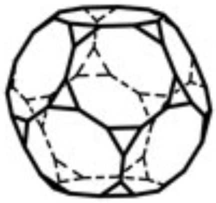
② 切頂六面体



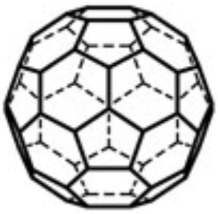
③ 切頂八面体



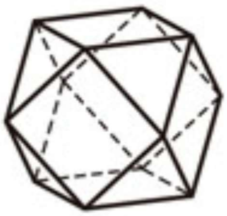
④ 切頂十二面体



⑤ 切頂二十面体



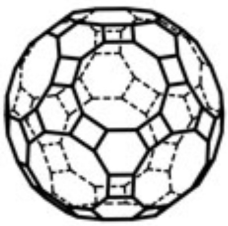
⑥ 立方八面体



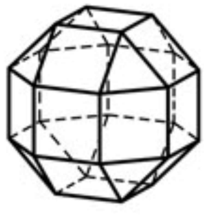
⑦ 二十面十二面体

⑧ 切頂立方八面体

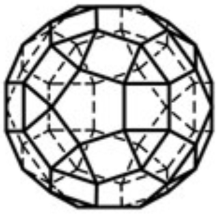
⑨ 切頂二十面十二面体



⑩ 斜立方八面体



⑪ 斜十二面二十面体



⑫ ねじれ立方体
(変形立方体)

⑬ ねじれ十二面体
(変形十二面体)