

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】基本的な数列である「等差数列」の和を求めることができる。

□等差数列の和

初項 1, 公差 1, 項数 100 の等差数列の和 S を求めてみよう。

$$\begin{array}{r}
 S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\
 +) \quad S = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ 個}}
 \end{array}$$

よって
$$S = \frac{1}{2}(101 \times 100) = 5050$$



ヨハン・カール・フリードリッヒ・ガウス
 Carolus Fridericus Gauss
 1777/4/30 ~ 1855/2/23
 ドイツの数学者・天文学者・物理学者

一般に, 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の末項を l とし, 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (l - d) + l \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, この数列の項を逆の順に並べると

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + (a + d) + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

上の S の場合と同様に, ①と②の各辺を加えると

$$2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \cdots + (a + l) + (a + l)$$

右辺は, $a + l$ を n 個加えたものであるから

$$2S_n = n(a + l)$$

よって

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\frac{1}{2} \times \text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})$

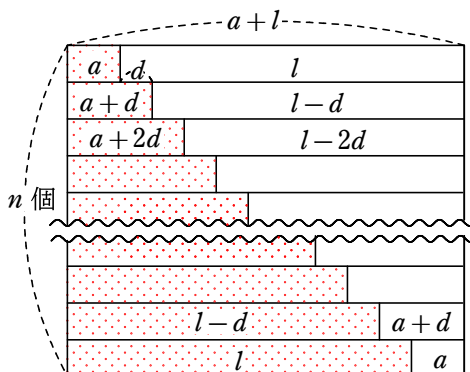
また, l は第 n 項であるから

$$l = a + (n - 1)d$$

これを③に代入して

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}$$

したがって, 次の公式が成り立つ。



等差数列の和

初項 a , 公差 d , 末項 l , 項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

S

初項から□項
までの和を表す

補足 等差数列の初項から第 n 項までの和は, n の 2 次式, 1 次式, または定数項で表される。

補足 公式より, 和 S_n が an^2+bn の形である数列は等差数列である

(an^2+bn+c , $c \neq 0$ だと, 初項の分ずれるので第 2 項以降が等差数列)

補足 数列 $\{a_n\}$ が等差数列 $\Leftrightarrow$ 差 $a_{n+1}-a_n$ が一定 $\Leftrightarrow a_n = pn+q \Leftrightarrow$ 和 $S_n = an^2+bn$

初項, 項数, 公差, 末項 どれが使えるかで公式を使い分ける

例 4) (1) 初項 3, 末項 27, 項数 13 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2} \cdot 13(3+27) = 195$$

$$\frac{1}{2} \times \text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})$$

(2) 初項 50, 公差 -4 , 項数 20 の等差数列の和は

$$\frac{1}{2} \cdot 20\{2 \cdot 50 + (20-1) \cdot (-4)\} = 240 \quad \text{終}$$

$$\text{末項} = \text{初項} + (\text{項数} - 1) \cdot \text{公差}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{項数} \cdot \{2 \cdot \text{初項} + (\text{項数} - 1) \cdot \text{公差}\}$$

別解 初項 50, 公差 -4 , 項数 20 であるから

$$\text{末項 } a_{20} \text{ は, } a_{20} = 50 + (20-1) \cdot (-4) = 50 - 76 = -26$$

$$\text{よって和は } \frac{1}{2} \cdot 20\{50 + (-26)\} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 24 = 240$$

末項を作ってから
求めてもよい

例題 3) 次の等差数列の和 S を求めよ。

100, 105, 110, $\dots$, 200

項数がわからない

解答 この等差数列の初項は 100, 公差は 5 であるから, 末項 200 が第 n 項であるとすると

$$100 + (n-1) \cdot 5 = 200$$

第 n 項が 200

一般項の公式で表す

$$\text{すなわち } 5n + 95 = 200$$

$$\text{ゆえに } n = 21$$

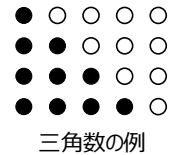
よって, 初項 100, 末項 200, 項数 21 の等差数列の和を求めて

$$S = \frac{1}{2} \cdot 21(100 + 200) = 3150$$

□いろいろな自然数の数列の和

自然数の数列 $1, 2, 3, \dots, n$ は, 初項 1 , 末項 n , 項数 n の等差数列であるから, その和は次のようになる。

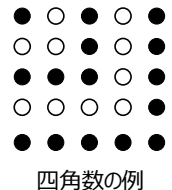
$$\text{自然数の和: } 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \leftarrow \text{三角数}$$



また, 正の奇数の数列 $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ は, 初項 1 , 末項 $2n-1$, 項数 n の等差数列であるから, その和 S は次のようになる。

$$S = \frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\} = n^2$$

奇数は $2n-1$
(偶数より 1 少ない)



すなわち

$$\text{奇数の和: } 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2 \quad \leftarrow \text{四角数} \quad \leftarrow \text{平方数}$$

例題 4) 10 から 100 までの自然数のうち, 3 で割って 2 余る数の和 S を求めよ。

解答 10 から 100 までの自然数のうち, 3 で割って 2 余る数を順に並べると

$$3 \cdot 3 + 2, 3 \cdot 4 + 2, 3 \cdot 5 + 2, \dots, 3 \cdot 32 + 2$$

となる。これは初項 11, 末項 98, 項数 30 の等差数列であるから, その和 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 30(11+98) = 1635$$

問 5) 1 から 100 までの自然数のうち, 次のような数の和を求めよ。

- (1) 3 の倍数 (2) 3 で割り切れない数

解答

- (1) 1 から 100 までの自然数のうち, 3 の倍数を順に並べると

$$3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 33$$

となる。これは, 初項 3, 末項 99, 項数 33 の等差数列であるから, その和 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 33(3+99) = 1683$$

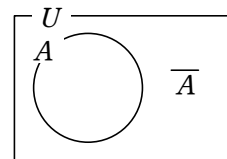
- (2) 1 から 100 までの自然数のうち, 3 で割り切れない数は,
1 から 100 までの自然数から 3 の倍数を取り除いた数である。

$$1 \text{ から } 100 \text{ までの自然数の和は } \frac{1}{2} \cdot 100(1+100) = 5050$$

1 から 100 までの自然数のうち, 3 の倍数の和は, (1) から 1683 である。

したがって, 求める和 S は

$$S = 5050 - 1683 = 3367$$



□等差数列の和の最大・最小

応用例題 1 初項が 49, 公差が -6 である等差数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) 第何項が初めて負の数となるか。
- (2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また, その和を求めよ。

方針… (1) $a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n の値を求める。

(2) 第 k 項が初めて負の数になるとき, 第 $(k-1)$ 項までの和が最大となる

解答 (1) 初項 49, 公差 -6 の等差数列の一般項は $a_n = 49 + (n-1) \cdot (-6)$

すなわち $a_n = -6n + 55$

$a_n < 0$ とすると $-6n + 55 < 0$

これを解いて $n > \frac{55}{6}$

よって $n \leq 9$ のとき $a_n > 0$, $n \geq 10$ のとき $a_n < 0$

したがって, 第 10 項が初めて負の数となる。

- (2) 初項から第 9 項までは正の数, 第 10 項以降は負の数で

あるから, 初項から第 9 項までの和が最大となる。また, その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \{ 2 \cdot 49 + (9-1) \cdot (-6) \} = 225$$

別解 $a_9 = -6 \cdot 9 + 55 = -54 + 55 = 1$ なので

$$\frac{1}{2} \cdot 9(49 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 50 = 225$$

$a_1 = 49, a_2 = 43, a_3 = 37, a_4 = 31, a_5 = 25$
 $a_6 = 19, a_7 = 13, a_8 = 7, a_9 = 1, a_{10} = -5$
 となるので第 9 項までが正, 以降が負

正の数の項を足すと増える
 負の数の項を足すと減る

$S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_8 < S_9 > S_{10} > S_{11} > \dots$
 となるので第 9 項までの和が最大

最終的な計算は,
 末項を求めてしまった方が楽なことも

深める 応用例題 1 を, 次のように解いてみよう。

- (1) 応用例題 1 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n として, S_n を n の式で表してみよう。
- (2) (1) で求めた n の式は自然数 n の 2 次関数とみなすことができる。 S_n を n の 2 次関数とみて, S_n の最大値を求めてみよう。

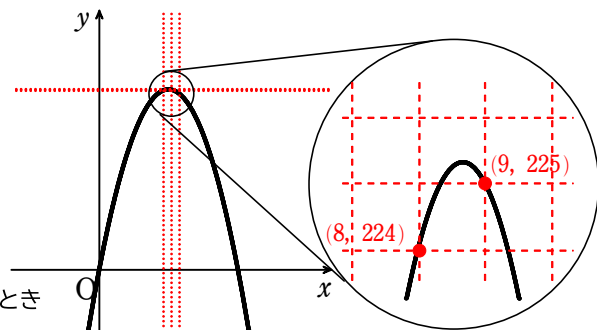
解答 (1) $S_n = \frac{1}{2} n \{ 2 \cdot 49 + (n-1) \cdot (-6) \} = -3n^2 + 52n$

$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= -3 \left(n^2 - \frac{52}{3} n \right) \\ &= -3 \left\{ \left(n - \frac{26}{3} \right)^2 - \left(\frac{26}{3} \right)^2 \right\} \\ &= -3 \left(n - \frac{26}{3} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{26}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

n は自然数であるから,

$\frac{26}{3}$ に最も近い自然数 $n=9$ のとき

最大値 $S_9 = -3 \cdot 9^2 + 52 \cdot 9 = (-27 + 52) \cdot 9 = 25 \cdot 9 = 225$



例題) ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$$S_{10} = 10, S_{20} = 40 \text{ のとき, } S_n \text{ を求めよ。}$$

解答 初項を a , 公差を d とすると $S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

$$S_{10} = 10 \text{ より } \frac{1}{2} \cdot 10(2a + 9d) = 10 \quad \leftarrow n = 10 \text{ を代入}$$

$$\text{整理して } 2a + 9d = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = 40 \text{ より } \frac{1}{2} \cdot 20(2a + 19d) = 40 \quad \leftarrow n = 20 \text{ を代入}$$

$$\text{整理して } 2a + 19d = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと } a = \frac{1}{10}, d = \frac{1}{5}$$

$$\text{よって } S_n = \frac{1}{2}n\left\{2 \cdot \frac{1}{10} + (n-1) \cdot \frac{1}{5}\right\} = \frac{n^2}{10}$$

$$a = \frac{1}{10}, d = \frac{1}{5} \text{ を代入}$$

$$\begin{array}{r} 2a + 19d = 4 \\ - \quad 2a + 9d = 2 \\ \hline 10d = 2 \\ d = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{array}$$

$$2a + \frac{9}{5} = 2$$

$$5 \text{ 倍して } 10a + 9 = 10$$

$$10a = 1 \text{ より } a = \frac{1}{10}$$

例題) 11 から 100 までの自然数のうち, 3 で割ると 1 余る数は何個あるか。

また, それらの和 S を求めよ。

$3n + 1$ とイメージする

解答 11 から 100 までの自然数のうち, 3 で割ると 1 余る数を順に並べると

$$\begin{array}{ccccccc} 3 \cdot 4 + 1, & 3 \cdot 5 + 1, & 3 \cdot 6 + 1, & \cdots, & 3 \cdot 33 + 1 & \textcircled{1} \\ \text{4項目} & \text{5項目} & \text{6項目} & & \text{33項目} \end{array}$$

1～33項=計33項

1～3項
=3項

4～33項
=?項

この数列 $\textcircled{1}$ の項の個数は $33 - 3 = 30$ (個)

よって, $\textcircled{1}$ は初項 13, 末項 100, 項数 30 の等差数列であるから

$$S = \frac{1}{2} \cdot 30(13 + 100) = 1695$$

1項目から数える場合は
簡単に項数が出る

例題) 第 10 項が 24, 第 30 項が 64 である等差数列について,

初項から第何項までの和が初めて 100 より大きくなるか。

解答 初項を a , 公差を d とすると, 第 n 項は $a + (n-1)d$

$$\text{第 10 項が 24, 第 30 項が 64 であるから } a + 9d = 24, a + 29d = 64$$

$$\text{これを解いて } a = 6, d = 2$$

よって初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 6 + (n-1) \cdot 2\} = n(n+5)$$

n は自然数であるから, n が増加すると S_n も増加し,

$$S_7 = 7 \cdot 12 = 84, S_8 = 8 \cdot 13 = 104 \text{ である。}$$

$$n(n+5) > 100 \text{ はきれいいには解けない}$$

$$\left(\text{ちなみに } n < \frac{-5 - 5\sqrt{17}}{2}, \frac{-5 + 5\sqrt{17}}{2} < n \right)$$

$n(n+5)$ なので $100 = 10 \cdot 10$ より
 $5 \cdot 10$ や $6 \cdot 11$ では小さすぎると
直観的に判断して
代入する候補を絞り込む

したがって, 初項から第 8 項までの和が初めて 100 より大きくなる。