

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】基本的な数列である「等比数列」を式で表すことができる。

□等比数列 (GP: *geometric progression* 幾何数列)

～ 各項に一定の数 r を掛けると、次の項が得られるとき、この数列を **等比数列** という

～ (後ろの項) ÷ (前の項) 【比】が常に等しい数列のこと ⇒ この比を**公比 r** という
common ratio

$$a_{n+1} = r \times a_n \text{ (後 = 公比} \times \text{前)} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ (後} \div \text{前 = 公比)}$$

初項 a_1 も公比 r も 0 でないとき

初項が a 、公比が r である等比数列 $\{a_n\}$ の各項は、順に

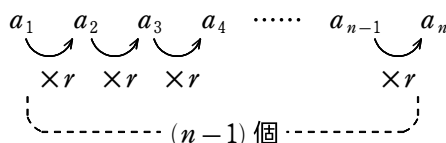
$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r = ar$$

$$a_3 = a_2 r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 r = ar^3$$

.....



と表され、 $r^0 = 1$ より $a_1 = ar^0$ と書けるから、一般に次のことが成り立つ。

等比数列の一般項

初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a \cdot r^{n-1}$

n 本の柵の間は $n-1$ カ所 (1 少ない)

(一般項) = (初項) $\cdot$ (公比) $^{n-1}$

【補足】 $n \geq 2$ のとき $\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \times r \times r \times \cdots \times r$

より $\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$ よって $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ これは $n=1$ でも成り立つ

例) (1) 初項 2、公比 -3 の等比数列は、次のようになる。

$$2, \xrightarrow{\times(-3)} -6, \xrightarrow{\times(-3)} 18, \xrightarrow{\times(-3)} -54, \cdots$$

後 = 公差 $\times$ 前

(2) 等比数列 $a, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ の初項 a と公比 r を求める。

$$\frac{1}{4}r = \frac{1}{8} \text{ より 両辺に } 4 \text{ を掛けて } r = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$$\text{また, } a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ より}$$

前 = 後 $\div$ 公差 で求めてもよい

$$\text{両辺に } 2 \text{ を掛けて } a = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

例5) 初項 2, 公比 3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

例えば, 第 8 項は $a_8 = 2 \cdot 3^7 = 4374$ 終

$$(\text{一般項}) = (\text{初項}) \cdot (\text{公比})^{n-1}$$

$$\text{公比} = \frac{\text{後}}{\text{前}}$$

$$\text{後} = \text{公比} \times \text{前}$$

$$\text{前} = \text{後} \div \text{公比}$$

問7) 次の等比数列の一般項を求めよ。

- (1) $-4, 8, -16, 32, \dots$ (2) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

(1) 与えられた等比数列を $\{a_n\}$ とすると等比数列であるから, その公比は $\frac{8}{-4} = -2$

初項 -4 , 公比 -2 であるから, 一般項は

$$a_n = (-4) \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^2 \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n+1}$$

(2) 与えられた数列は等比数列であるから, その公比は $\frac{1}{3}$

初項 3 , 公比 $\frac{1}{3}$ であるから, 一般項は

$$a_n = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2}$$

例題5) 第 4 項が -24 , 第 6 項が -96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 この数列の初項を a , 公比を r とすると $a_n = ar^{n-1}$

第 4 項が -24 であるから $ar^3 = -24 \dots\dots ①$

第 6 項が -96 であるから $ar^5 = -96 \dots\dots ②$

② ÷ ①より

$$\frac{ar^5}{ar^3} = \frac{-96}{-24}$$

$$r^2 = 4$$

$$\therefore r = \pm 2$$

どちらかの
方法で

②より

$$ar^5 = ar^3 \cdot r^2 = -96$$

①代入して

$$-24r^2 = -96$$

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = \pm 2$$

① から $r = 2$ のとき $a = -3$, $r = -2$ のとき $a = 3$

よって, 一般項は $a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

または $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

別解

初, $\circ$, $\circ$, $\boxed{-24}$, $\circ$, $\boxed{-96}$

$$-24 \times r \times r = -96$$

$$r^2 = \frac{-96}{-24} = 4$$

$$\therefore r = \pm 2$$

$$a \times r \times r \times r = -24$$

$$r = 2 \text{ のとき } 8a = -24$$

$$a = -3$$

$$r = -2 \text{ のとき } -8a = -24$$

$$a = 3$$

$$\text{よって } a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{または } a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

□等比数列の性質

問8) a, b, c が0でないとき, 次のことが成り立つことを示せ。

$$\text{数列 } a, b, c \text{ が等比数列} \iff b^2 = ac$$

〔解答〕 (⇒) 0でない3数 a, b, c がこの順に等比数列をなすとき

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{よって} \quad b^2 = ac$$

$$(\Leftarrow) \text{ 逆に, } b^2 = ac \text{ のとき } c = \frac{b^2}{a}$$

よって, 3数 a, b, c は $a, b, \frac{b^2}{a}$ となり, これは初項 a , 公比 $\frac{b}{a}$ の等比数列をなす。

○, △, □ が等比数列 ⇕ $\Delta^2 = \bigcirc \times \square$ ($\Delta \times \Delta = \bigcirc \times \square$) 真ん中の2乗は 両端の積に等しい 【平均形】	○, △, □ が等比数列 ⇕ ○, ○・r, ○・r^2 【公比形】	○, △, □ が等比数列 ⇕ $\Delta \cdot r^{-1}, \Delta, \Delta \cdot r$ $\bigcirc = \Delta \cdot r^{-1}, \square = \Delta \cdot r$ ⇕ $r = \frac{\Delta}{\bigcirc} = \frac{\square}{\Delta}$ 【対称形】
---	---	---

△に当たる項を **等比中項** という

例) 数列 $2, x, 5, \dots$ が等比数列であるとき, x の値を求めよ。

〔解答〕 隣り合う2項の比が等しいから $\frac{x}{2} = \frac{5}{x}$

$$\text{よって} \quad x^2 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\text{したがって} \quad x = \pm\sqrt{10}$$

例題) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ は等比数列であり, $a_1 + a_2 = 4, a_3 + a_4 = 36$ である。

この等比数列の一般項 a_n を求めよ。

〔解答〕 初項を a , 公比を r とする。

$$a_1 + a_2 = 4 \text{ であるから } a + ar = 4 \quad \text{よって} \quad a(1+r) = 4 \quad \dots\dots ①$$

$$a_3 + a_4 = 36 \text{ であるから } ar^2 + ar^3 = 36 \quad \text{よって} \quad ar^2(1+r) = 36 \quad \dots\dots ②$$

$$② \text{ は } r^2 \cdot a(1+r) = 36 \text{ とかけるから } ① \text{ を } ② \text{ に代入すると } 4r^2 = 36$$

$$r^2 = 9 \text{ を解くと } r = \pm 3$$

$$r = 3 \text{ のとき, } ① \text{ より } 4a = 4 \quad \text{よって} \quad a = 1$$

$$r = -3 \text{ のとき, } ① \text{ より } -2a = 4 \quad \text{よって} \quad a = -2$$

$$\text{したがって, 求める一般項は} \quad a = 1, r = 3 \text{ より } a_n = 3^{n-1}$$

$$\text{または} \quad a = -2, r = -3 \text{ より } a_n = -2(-3)^{n-1}$$

例題) 初項 2, 公比 3 である等比数列 $\{a_n\}$ において, 初めて 1000 より大きくなるのは第何項か。

解答 一般項は $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_n > 1000$ を満たす最小の自然数 n を求めればよい。

$$2 \cdot 3^{n-1} > 1000 \text{ とすると } 3^{n-1} > 500$$

n が増加すると 3^{n-1} も増加し,

$$3^5 = 243, 3^6 = 729 \text{ であるから}$$

$$n-1 \geq 6$$

$$\therefore n \geq 7$$

この不等式を満たす最小の自然数 n は $n=7$

よって, この数列で初めて 1000 より大きくなるのは 第 7 項

$$3^{n-1} \geq 729 > 500 > 243 \text{ より}$$

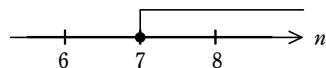
$$3^{n-1} \geq 3^6 > 500 > 3^5$$

底 3 は 1 より大きいので

指数を比較しても

大小関係は変わらない

$$\therefore n-1 \geq 6$$



深める 等差数列でもあり, 等比数列でもある数列はあるだろうか。

解答

① 初項 a , 公差 d の等差数列は, $a, a+d, a+2d, \dots$ と表されるから,

$$\text{この数列が等比数列でもあるとすると } a(a+2d) = (a+d)^2$$

$$\text{すなわち } a^2 + 2ad = a^2 + 2ad + d^2 \text{ よって } d^2 = 0 \text{ すなわち } d = 0$$

したがって, 等差数列でもあり, 等比数列でもある数列は, a を定数として

$$a, a, a, a, \dots \text{ となる数列である。}$$

公差 0, 公比 1

等比中項の
考えを用いる

解答

② 初項 a , 公比 r の等比数列は, $a, ar, ar^2, \dots$ と表されるから,

$$\text{この数列が等差数列でもあるとすると } a + ar^2 = 2ar$$

$$a = 0 \text{ のとき, この数列は成り立つ。} a \neq 0 \text{ とすると } 1 + r^2 = 2r \text{ すなわち } r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$\text{よって } (r-1)^2 = 0 \text{ したがって } r = 1$$

$a \neq 0$ と $a = 0$ のときをあわせて考えて, 等差数列でもあり, 等比数列でもある数列は, a を定数として

$$a, a, a, a, \dots \text{ となる数列である。}$$

等差中項の
考えを用いる