

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】基本的な数列である「等比数列」の数列の和を求めることができる。

□等比数列の和

初項 2, 公比 3, 項数 6 の等比数列の和 S を求めてみよう。

$$S = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この両辺に公比 3 を掛けると

$$3S = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② から $S - 3S = 2 - 2 \cdot 3^6$

よって $S = \frac{2(1-3^6)}{1-3} = 728$

$$\begin{array}{r} S = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 \\ -) 3S = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 \\ \hline S - 3S = 2 - 2 \cdot 3^6 \end{array}$$

一般に、初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$r=1$ のとき ① より $S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ 個}} = na$

$r \neq 1$ のとき ① の両辺に公比 r をかけると

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② をすると

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ -) rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = a - ar^n \end{array}$$

和を公比倍して,
項を1つずつ
ずらして引く。

すなわち $(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$r \neq 1$ より $1-r \neq 0$ であるから $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

分母分子に -1 をかけると $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times \frac{-1}{-1}$

$$= \frac{a(-1+r^n)}{-1+r}$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

したがって、次の公式が成り立つ。

この処理の仕方は
あとでも出てくるので
要注意

等比数列の和

初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和を S_n とする。

$$1 \quad r \neq 1 \text{ のとき} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

(公比が 1 より小さいとき) (公比が 1 より大きいとき)

※ 分母分子の引く順番は同じ (そろえる)。分子の公比は (項数) 乗

$$2 \quad r = 1 \text{ のとき} \quad S_n = na$$

S

初項から□項
までの和を表す

補足 $(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})=1-r^n$ を用いれば

$$r \neq 1 \text{ のとき} \quad 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

となるから, S_n は次のようにも求められる

$$S_n = a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}) = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

例 6) (1) 初項 1, 公比 2, 項数 n の等比数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

公比が 2 なので (1 より大きい) $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

(2) 初項 9, 公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n

$$\text{は} \quad S_n = \frac{9\{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)} = \frac{9}{4}\{1 - (-3)^n\}$$

終

公比が -3 なので (1 より小さい) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

応用例題 2)

第 2 項が 3, 初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の, 初項 a と公比 r を求めよ。

解答 与えられた条件から

$$ar = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a + ar + ar^2 = 13 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から} \quad a(1+r+r^2) = 13$$

$$\text{この式の両辺に } r \text{ を掛けると} \quad ar(1+r+r^2) = 13r$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して整理すると} \quad 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad r = \frac{1}{3}, 3$$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad r = \frac{1}{3} \text{ のとき } a = 9, \quad r = 3 \text{ のとき } a = 1$$

$$\text{よって} \quad a = 9, r = \frac{1}{3} \text{ または } a = 1, r = 3$$

$r \neq 0$ であることがわかる。

「初項から…」なので和の公式を用いると

$r \neq 1$ のとき

$$\frac{a(1-r^3)}{1-r} = \frac{a(1-r)(1+r+r^2)}{1-r} = a(1+r+r^2)$$

$r = 1$ とすると $3a = 13$ より

$$a = \frac{13}{3} \text{ を得るが } ar = 3 \text{ を満たさない}$$

「初項から…」や場合分けなど注意が必要

研究 複利計算と等比数列

金利には単利と複利があり、単利は元本が変わらないので利息は変わりませんが、複利は利息を元本に入れて計算するので利息も変化していきます。一定の期間の終わりごとに利息を元金に繰り入れ、その合計額を次の期間の元金として利息を計算する方法を複利法 という。



毎期の初めに一定の金額 a 円を積み立てるとき、第 n 期末の積立金の元利合計 S 円を、1 期の利率 r 、1 期ごとの複利法で計算してみる。

第 1 回の積立金 a 円について、第 1 期末には利息 ar 円がつくから、第 1 期末の元利合計は $a(1+r)$ 円となる。これが第 2 期の元金になるから、第 2 期末の元利合計は $a(1+r)^2$ 円となる。以降同様に計算されて、第 1 回の積立金 a 円の第 n 期末の元利合計は $a(1+r)^n$ 円となる。

第 2 回の積立金 a 円の第 n 期末の元利合計は、第 1 回よりも期間が 1 期少ないから、 $a(1+r)^{n-1}$ 円である。以下同様に考えると、第 1 回、第 2 回、第 3 回、……、第 n 回の積立金 a 円の第 n 期末の元利合計は、それぞれ次のようになる。

$$a(1+r)^n \text{ 円}, a(1+r)^{n-1} \text{ 円}, a(1+r)^{n-2} \text{ 円}, \dots, a(1+r) \text{ 円}$$

		1 期末	2 期末	3 期末	……	n 期末
第 1 回	$a \rightarrow$	$a(1+r)$	$\rightarrow a(1+r)^2$	$\rightarrow a(1+r)^3$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$a(1+r)^n$
第 2 回		a	$\rightarrow a(1+r)$	$\rightarrow a(1+r)^2$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$a(1+r)^{n-1}$
第 3 回			a	$\rightarrow a(1+r)$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$a(1+r)^{n-2}$
$\vdots$				$\ddots$	$\rightarrow \dots \rightarrow$	$\vdots$
第 n 回					$\rightarrow$	$a(1+r)$

よって、その和 S 円は

$$S = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \dots + a(1+r)^n$$

となり、初項 $a(1+r)$ 、公比 $1+r$ 、項数 n の等比数列の和に等しい。

ゆえに
$$S = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$



例えば、年利率 0.3 %、1 年ごとの複利で、毎年初めに 10 万円ずつ積み立てるとき、10 年後の年末における元利合計 S 円は、 $1.003^{10} = 1.030408$ として計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} S &= 100000(1.003 + 1.003^2 + 1.003^3 + \dots + 1.003^{10}) \\ &= 100000 \times \frac{1.003(1.003^{10} - 1)}{1.003 - 1} = 100000 \times \frac{1.003(1.030408 - 1)}{0.003} \\ &= 1016640.8 \end{aligned}$$

ゆえに、元利合計は約 101 万 6 千 6 百円となる。