

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】いろいろな工夫をすることによって、複雑な数列の和を求めることができる。

部分分数分解

分母が因数分解されているような分数をいくつかの分数に分解すること

※ 基本的には恒等式を用いるが、 $\frac{\square}{(x-\bigcirc)(x-\triangle)}$ の形なら差を用いて作ることもできる。

応用例題 3) 次の和 S を求めよ。

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

解答 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\text{分子} \left(\frac{1}{\text{小}} - \frac{1}{\text{大}} \right)}{\text{大} - \text{小} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}$

$$= \frac{1}{(k+1) - k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{なので}$$

恒等式で考えると

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \quad \text{とき}$$

両辺に $n(n+1)$ をかけると

$$1 = a(n+1) + bn$$

$$0 \cdot n + 1 = (a+b)n + a$$

$$\text{より} \quad \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \quad \text{したがって } b=-1$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

※ 複雑なものは恒等式で

(詳細は次ページ参照)

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{残る} & \text{打ち消す} & \text{打ち消す} & \text{打ち消す} & \text{打ち消す} & \text{打ち消す} & \text{残る} \end{matrix}$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

通分

$$= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$



部分分数分解の規則性の確認

★ 部分分数分解のポイントを押さえよう！

部分分数分解とは 分数式を分解して、元の分数式の分母より小さい次数の分母からなる分数式の和に変形すること。

(分母の次数) > (分子の次数) のとき

注 (分母の次数) < (分子の次数) のとき
 $A = BQ + R$ を用いて (分母の次数) > (分子の次数) となるように変形しよう。

(分母の式) = 0 の方程式の解が「異なる実数解」のとき

分母の方程式の解が「異なる実数解」のときは、次のような形に分解することができる。

$$\text{例: } \frac{P(x)}{(x+\bigcirc)(x+\triangle)\cdots(x+\square)} = \frac{A_m}{(x+\bigcirc)} + \frac{A_{m-1}}{(x+\triangle)} + \cdots + \frac{A_1}{(x+\square)}$$

(分母の式) = 0 の方程式の解に「重解を含む」とき

分母の方程式の解に「重解を含む」ときは、次のような形に分解することができる。

$$\text{例: } \frac{P(x)}{(x+\bigcirc)^m} = \frac{A_m}{(x+\bigcirc)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x+\bigcirc)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x+\bigcirc)^2} + \frac{A_1}{(x+\bigcirc)^1}$$

(分母の式) = 0 の方程式の解に「虚数解を含む」とき

分母の方程式の解に「虚数解を含む」ときは、実数の範囲で因数分解ができないときでもあるので、分母は2次式のまま、次のような形に分解することができる。

$$\text{例: } \frac{2x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

分母が「2次式」とき

$$\frac{\bullet x + \blacksquare}{(\bigcirc x + \triangle)(\diamond x + \square)} = \frac{A}{\bigcirc x + \triangle} + \frac{B}{\diamond x + \square}$$

$$\frac{\bullet x + \blacksquare}{(\bigcirc x + \triangle)^2} = \frac{A}{(\bigcirc x + \triangle)^2} + \frac{B}{\bigcirc x + \triangle}$$

注 分子が1の場合は差をとって OK

$$\frac{1}{(\text{大})(\text{小})} = \frac{1}{\text{大}-\text{小}} \left(\frac{1}{\text{小}} - \frac{1}{\text{大}} \right)$$

※ 分子が1以外の定数項のときは
 (定数) × (分子1での部分分数分解) としよう

分母が「3次式」とき

$$\frac{\bullet x^2 + \blacktriangle x + \blacksquare}{(\bigcirc x + \triangle)(\diamond x + \square)(\nabla x + \star)} = \frac{A}{\bigcirc x + \triangle} + \frac{B}{\diamond x + \square} + \frac{C}{\nabla x + \star}$$

$$\frac{\bullet x^2 + \blacktriangle x + \blacksquare}{(\bigcirc x + \triangle)^2(\diamond x + \square)} = \frac{A}{(\bigcirc x + \triangle)^2} + \frac{B}{\bigcirc x + \triangle} + \frac{C}{\diamond x + \square}$$

$$\frac{\bullet x^2 + \blacktriangle x + \blacksquare}{(\bigcirc x + \triangle)(\diamond x^2 + \square x + \star)} = \frac{A}{\bigcirc x + \triangle} + \frac{Bx+C}{\diamond x^2 + \square x + \star}$$

$$\frac{\bullet x^2 + \blacktriangle x + \blacksquare}{(\bigcirc x + \triangle)^3} = \frac{A}{(\bigcirc x + \triangle)^3} + \frac{B}{(\bigcirc x + \triangle)^2} + \frac{C}{\bigcirc x + \triangle}$$