

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】群数列の考え方を理解しよう！

群数列の基本方針

- ① 群に分けていないときの数列の性質を調べる
- ② 群の分け方の規則性（特に最初の項や最後の項）に注目
- ③ 第 n 群の項数や最初に来る項を n の式で表す

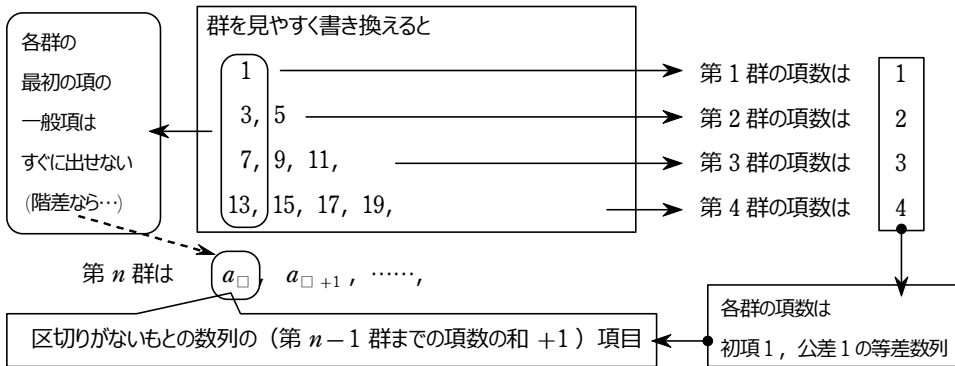
応用例題 5) 正の奇数の列を、次のように群に分ける。

ただし、第 n 群には n 個の奇数が入るものとする。

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, ……
 第1群 第2群 第3群 第4群

群（区切り）がないときは
 初項 1, 公差 2 の等差数列であるので $2k-1$

- (1) 第 n 群の最初の奇数を求めよ。
- (2) 第 n 群にあるすべての奇数の和を求めよ。



【解答】(1) $n \geq 2$ のとき、第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

求める数は、もとの奇数の列（区切りのない数列）の第 $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right\}$ 項であるから

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right\} - 1 = (n-1)n + 2 - 1 = n^2 - n + 1$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって、第 n 群の最初の奇数は $n^2 - n + 1$

(2) 第 n 群にある奇数の列は、初項 $n^2 - n + 1$ 、公差 2、項数 n の等差数列である。

よって、求める和は

$$\frac{1}{2}n\{2(n^2 - n + 1) + (n-1) \cdot 2\} = n^3$$

【深める】 応用例題 5 において、101 は第何群に含まれるだろうか。

101 が第 n 群に含まれるとすると $n^2 - n + 1 \leq 101 < (n+1)^2 - (n+1) + 1$

第 n 群の最初の項以上
 第 $(n+1)$ 群の最初の項未満

すなわち $n^2 - n \leq 100 < n^2 + n$

よって $n(n-1) \leq 100 < (n+1)n \dots\dots ①$

$n(n-1)$ は自然数 n が増加するとともに単調に増加し、

$10 \cdot 9 = 90$, $11 \cdot 10 = 110$ であるから

①を満たす自然数 n は $n = 10$

したがって、101 は第 10 群に含まれる (ちなみに第 6 項目)

第 10 群の初項は $10^2 - 10 + 1 = 91$

初項 91, 公差 2 であるから

$$91 + (m-1) \cdot 2 = 101$$

$$\therefore m = 6$$

演習問題 【青チャート基本例題 30 類題】

分数の列を、次のような群に分ける。ただし、第 n 群には n 個の分数が入り、その分母は n , 分子は 1 から n までの自然数であるとする。

$$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \mid \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} \mid \frac{1}{5}, \dots\dots$$

第 1 群 第 2 群 第 3 群 第 4 群

第 1 群の項数は

第 2 群の項数は

第 3 群の項数は

第 4 群の項数は

1
2
3
4

(1) $\frac{3}{10}$ は第何項か。

(2) 第 100 項を求めよ。

解答

(1) $\frac{3}{10}$ は第 10 群の 3 番目の数である。

第 10 群は

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots\dots, \frac{10}{10}$$

各群の項数は

初項 1, 公差 1 の等差数列

$$\text{よって } \frac{1}{2}n(n+1)$$

第 1 群から第 9 群までに入る数の個数は

$$\frac{1}{2} \cdot 9(9+1) = 45$$

よって、 $45 + 3 = 48$ から、 $\frac{3}{10}$ はこの数列の第 48 項である。

9 群までの項数の和 + 10 群での項数

(2) 第 100 項が第 n 群に入る数であるとする

$$\sum_{k=1}^{n-1} k < 100 \leq \sum_{k=1}^n k$$

($n-1$) 群までの項数の和

n 群までの項数の和

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 100 < \frac{1}{2}n(n+1)$$

すなわち $(n-1)n < 200 \leq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は $n = 14$

$$100 - \sum_{k=1}^{13} k = 100 - \frac{1}{2} \cdot 13(13+1) = 100 - 91 = 9$$

であるから、第 100 項は $\frac{9}{14}$