

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】数列を定める規則を表す等式「漸化式」について理解し、活用することができる。

数列の帰納的定義 (1) 初項 (2) 前の項から、その次に続く項を定める規則
 この2つを与えて数列を定めることを数列の帰納的定義という。
 特に(2)の規則を式で示したものを『**漸化式**』^{ぜんかしき}という。

数列 $\{a_n\}$ は、次の2つの条件 [1], [2] を与えると、 $a_2, a_3, a_4, \dots$ が順に求められ、すべての項がただ1通りに定まる。

[1] 初項 a_1

[2] a_n から a_{n+1} を決める関係式 ($n=1, 2, 3, \dots$)

数列 $\{a_n\}$ が次の2つの条件を満たしているとする。

[1] $a_1=1$ [2] $a_{n+1}=a_n+n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

[1] をもとにして、[2] において n を $1, 2, 3, \dots$ とすると

$$a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$

.....

となり、順次 $a_2, a_3, a_4, \dots$ の値がただ1通りに定まる。したがって、数列 $\{a_n\}$ は上の2つの条件 [1], [2] によって定められる。この2つを与えて数列を定めることを数列の帰納的定義という。

上の式 [2] のように、数列において、その前の項から次の項をただ1通りに定める規則を示す等式を**漸化式**という。今後、特に断りがない場合は、漸化式は $n=1, 2, 3, \dots$ で成り立つものとする。

例題 10) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の第4項を求めよ。

$$a_1=3, \quad a_{n+1}=2a_n-1$$

解答

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

よって $a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$

□まず押さえるべき4つのタイプの漸化式 その1【重要】

特に重要

【1】等差数列型: $a_{n+1} = a_n + d$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = d$$

(差が一定: 公差) とみる

【青チャート例題 3 3 類題】

例 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3$

解答 $a_{n+1} - a_n = -3$ より公差 -3

よって数列 $\{a_n\}$ は

初項 2 , 公差 -3 の等差数列

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3)$$

$$\therefore a_n = -3n + 5$$

【2】等比数列型: $a_{n+1} = r \cdot a_n$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

(比が一定: 公比) とみる

この形から公比を
読み取ること

【青チャート例題 3 3 類題】

例 $a_1 = -3, 5a_{n+1} = 2a_n$

解答 $a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$ より公比 $\frac{2}{5}$

よって数列 $\{a_n\}$ は

初項 -3 , 公比 $\frac{2}{5}$ の等比数列

$$\therefore a_n = -3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

【4】階差数列型:

差が不定

$$a_{n+1} - a_n = (f(n): n \text{ の多項式})$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

と $n=1$ での確認を

例 $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2^n$

解答 $a_{n+1} - a_n = 2^n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 2^n であるから,

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 3 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

【3】変比数列型: $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$

$\Rightarrow$ 次回以降に説明します

$f(n)$ は
 n の式のこと

【青チャート例題 3 3 3 5 3 9 類題】

よって $a_n = 2^n + 1 \dots\dots ①$

① で $n=1$ とすると

$a_1 = 3$ が得られるから,

① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって, 一般項は

$$a_n = 2^n + 1$$

重要

【5】隣接2項間型①: $a_{n+1} = p \cdot a_n + q \Rightarrow$ 特性方程式 $x = p \cdot x + q$ を解いて等比型に

【青チャート例題 3 4 類題】

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad (\text{等差型})$$

$$a_{n+1} = 3a_n \quad (\text{等比型})$$

の合わさった形

→ どちらかに変形したい

→ 数学は強いものの言うことを聞く

→ 等差 = 1 次関数的

等比 = 指数関数的

→ 等比に帰着したい

→ $a_{n+1} + A = 3(a_n + A)$ としたい

$n+1$ 項目 公比 $\times n$ 項目

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = ③ a_n + 2 \dots ①$

【解答】 ①を $a_{n+1} + A = 3(a_n + A) \dots ②$ と変形したい

$$a_{n+1} = 3a_n + 2A \dots ③$$

①③より $A = 1$

②に代入して $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ 等比型

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比 ③ の等比数列なので

$$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

【特性方程式】

$a_{n+1} = A \cdot a_n + B$ は, $\alpha = A \cdot \alpha + B$ を満たす α を求め $a_{n+1} = A \cdot a_n + B$ の両辺から α を引くと

$$a_{n+1} - \alpha = A \cdot (a_n - \alpha)$$

となる

【解説】

$$a_{n+1} = A \cdot a_n + B \dots ① \text{ が}$$

$$a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha) \dots ②$$

と変形できるとする。

②より

$$a_{n+1} = A \cdot a_n - A \cdot \alpha + \alpha \dots ③$$

①と比較すると $B = -A \cdot \alpha + \alpha$

整理すると $\alpha = A \cdot \alpha + B$

↑①-③をしても求められる

となり, ①で a_{n+1} と a_n を α とおいたものと

一致する。

【別解】 p, q は定数で, $p \neq 0, p \neq 1$ とする。

$$a_{n+1} = p a_n + q \dots ①$$

①の式を $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \dots ②$

と変形することができればよい

①に対して, 等式 $\alpha = p\alpha + q \dots ③$

を満たす定数 c を考えると,

①-③ から ②の等式が導かれる。

$$\begin{array}{r} a_{n+1} = p a_n + q \\ -) \quad \alpha = p \alpha + q \\ \hline a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha) \end{array}$$

結果的に, たまたま, もとの漸化式で a_{n+1} と a_n を α や x とおいたものと一致するため,

置き換えてできた方程式を解けばよいという形で活用されている。

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = ③ a_n + 2$

変形すると

$$a_{n+1} - (\text{特性方程式の解}) = ③ (a_n - (\text{特性方程式の解}))$$

$$a_{n+1} - (-1) = ③ (a_n - (-1))$$

$n+1$ 項目 公比 $\times n$ 項目

重要

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比 ③ の等比数列なので

$$a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

等比型

※ 特性方程式

～メモ書き等で良い

a_{n+1}, a_n を x にして

$$x = 3x + 2$$

$$\therefore x = -1$$

研究 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列の階差数列

漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を考える。

解答 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ により $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

も成り立つ。 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ から $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

ここで, $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}, a_{n+1} - a_n = b_n$ であるから $b_{n+1} = 2b_n$

したがって, 階差数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$, 公比 2 の等比数列である

$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$ より $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1}$ であることから

$n \geq 2$ のとき $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} = 1 + \frac{4 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 1 + 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 3$

$n = 1$ のとき $2^{1+1} - 3 = 4 - 3 = 1$ となり a_1 と一致する

したがって, すべての自然数 n について $a_n = 2^{n+1} - 3$ である。

このように, 一般に, $p \neq 0$ のとき, 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の階差数列は, 公比 p の等比数列である。このことを利用して, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることもできる。

階差数列は漸化式における解の公式的に見ることができる

補足 記述の仕方について

隣接二項間型の問題を記述するときは「特性方程式より」や「 $x = 3x + 2$ より」, 「 $\alpha = 3\alpha + 2$ より」などといった文言(受験テクニック)を記載するのではなく, 教科書同様 「変形すると」などと記載をしましょう。

もう少し丁寧に書くのであれば

$$\begin{aligned} & \text{「} a_{n+1} = 3a_n + 2 \text{ より } a_{n+1} + 1 = 3a_n + 2 + 1 \\ & \qquad \qquad \qquad a_{n+1} + 1 = 3a_n + 3 \\ & \qquad \qquad \qquad a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1) \text{」} \end{aligned}$$

さらに丁寧に記載すると

$$\begin{aligned} & \text{「} a_{n+1} = 3a_n + 2 \text{ を変形して } a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha) \text{ の形にするために} \\ & \quad \alpha = 3\alpha + 2 \text{ を満たす 定数 } \alpha \text{ を考える。} \\ & \quad \text{もとの漸化式と } \alpha = 3\alpha + 2 \text{ の辺々の差をとると,} \\ & \quad \quad a_{n+1} - \alpha = (3a_n + 2) - (3\alpha + 2) = 3(a_n - \alpha) \text{ となる。} \\ & \quad \text{ここで } \alpha = 3\alpha + 2 \text{ より } \alpha = -1 \text{ であることから } a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1) \text{ と変形できる」} \end{aligned}$$

などのように大学の採点者がきちんと数学的に理論を積み上げて解答を作る姿勢が感じられる記述になっていると素晴らしいと思います。

□まず押さえるべき4つのタイプの漸化式【重要】

【1】等差数列型: $a_{n+1} = a_n + d$
 $\Rightarrow a_{n+1} - a_n = d$ (差が一定: 公差) とみる

【2】等比数列型: $a_{n+1} = r \cdot a_n$
 $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (比が一定: 公比) とみる

【4】階差数列型: $a_{n+1} = a_n + f(n)$
 $\Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$

【5】隣接2項間型①: $a_{n+1} = p \cdot a_n + q$
 $\Rightarrow$ 特性方程式 $x = p \cdot x + q$ を解いて等比型に

□その他基本形を活用した漸化式①

【8】隣接2項間型③: $a_{n+1} = pa_n + qn + r$

【青チャート例題35類題】

【方針】1 $\Rightarrow \{a_n + \alpha n + \beta\}$ の等比数列へ

【方針】2 $\Rightarrow$ 階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3n \cdots ①$

【解答】 【方針】1

①を $\underbrace{a_{n+1} + A(n+1) + B}_{n+1 \text{ 項目}} = 2(\underbrace{a_n + An + B}_{\text{公比} \times n \text{ 項目}}) \cdots ②$

と変形したい

$$a_{n+1} = 2a_n + An + B - A \cdots ③$$

$$\text{①③より} \begin{cases} A = -3 \\ B - A = 0 \end{cases} \therefore A = -3, B = -3$$

②に代入して

$$a_{n+1} - 3(n+1) - 3 = 2(a_n - 3n - 3)$$

数列 $\{a_n - 3n - 3\}$ は

$$\text{初項 } a_1 - 3 \cdot 1 - 3 = -1 - 3 - 3 = -5$$

公比2の等比数列なので

$$a_n - 3n - 3 = -5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3n + 3$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= -5 \cdot 2^{n-1} + 3 \\ a_{n+1} - 2a_n &= -3n \\ \text{の連立方程式でも} \end{aligned}$$

【深める】

① $a_{n+1} = 3a_n + 5^n$ の一般項はどう導くか

② $a_{n+1} = 3a_n + 2n + 1 + 5^n$ の一般項はどう導くか

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 3n$

【解答】 【方針】2 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = 2a_{n-1} - 3(n-1) = 2a_{n-1} - 3n + 3$$

$$\begin{array}{r} a_{n+1} = 2a_n - 3n \\ -) \quad a_n = 2a_{n-1} - 3n + 3 \\ \hline a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) - 3 \end{array}$$

ここで $b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 = (2a_1 - 3) - a_1 \\ &= 2 - 3 - 1 = -2 \end{aligned} \quad \begin{cases} x = 2x - 3 \\ \therefore x = 3 \end{cases}$$

$b_n = 2b_{n-1} - 3$ これを変形すると

$$b_n - 3 = 2(b_{n-1} - 3)$$

数列 $\{b_n - 3\}$ は

$$\text{初項 } b_1 - 3 = -2 - 3 = -5$$

公比2の等比数列であるから

$$b_n - 3 = -5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore b_n = a_{n+1} - a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 3$$

$$n \geq 2 \text{ なので } a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-5 \cdot 2^{k-1} + 3)$$

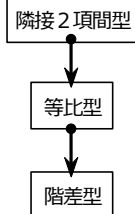
$$= 1 + \frac{-5(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + 3(n-1)$$

$$= 1 - 5 \cdot 2^{n-1} + 5 + 3n - 3$$

$$= 3n - 5 \cdot 2^{n-1} + 3$$

これは $a_1 = 1$ を満たすので

$$a_n = 3n - 5 \cdot 2^{n-1} + 3$$



□ その他基本形を活用した漸化式②

【7】隣接2項間型②: $a_{n+1} = pa_n + q^n$

方針 1 $\Rightarrow \{a_n + A \cdot q^n\}$ の等比数列へ

方針 2 $\Rightarrow$ 両辺を q^{n+1} で割って $\frac{a_n}{q^n} = b_n$ とおく

$\Rightarrow$ 【5】隣接2項間型①へ

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

【青チャート例題36類題】

解答 方針 1

$$\textcircled{1} \text{を } \underbrace{a_{n+1} + A \cdot 3^{n+1}}_{n+1 \text{ 項目}} = 2(\underbrace{a_n + A \cdot 3^n}_{\text{公比} \times n \text{ 項目}}) \cdots \textcircled{2}$$

と変形したい

$$a_{n+1} + 3A \cdot 3^n = 2a_n + 2A \cdot 3^n$$

$$a_{n+1} = 2a_n - A \cdot 3^n \cdots \textcircled{3}$$

①③より $A = -1$

②に代入して $a_{n+1} - 3^{n+1} = 2(a_n - 3^n)$
数列 $\{a_n - 3^n\}$ は

$$\text{初項 } a_1 - 3^1 = 1 - 3 = -2$$

公比 2 の等比数列なので

$$a_n - 3^n = -2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3^n - 2^n$$

解答 方針 2

両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

ここで $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とすると

$$b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$$

であるから $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$

これを变形すると

$$b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$$

数列 $\{b_n - 1\}$ は

$$\text{初項 } b_1 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である

$$b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

$$\frac{a_n}{3^n} = -\frac{2^n}{3^n} + 1$$

$$\therefore a_n = -2^n + 3^n$$

特性方程式
 $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$$3x = 2x + 1 \\ \therefore x = 1$$

隣接2項間型

等比型

□その他基本形を活用した漸化式③

【9】分数型①: $a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q}$
 $\Rightarrow$ 両辺の逆数をとって $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおく

【青チャート例題 37 類題】

例 $a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 5}$

【解答】 両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n + 5}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n}{a_n} + \frac{5}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 5 \cdot \frac{1}{a_n} + 4$$

ここで $b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$$

であるから $b_{n+1} = 5b_n + 4$

これを变形すると

$$\frac{b_{n+1} + 1}{n+1} = \frac{5(b_n + 1)}{n}$$

$n+1$ 項目 (公比) $\times n$ 項目

数列 $\{b_n + 1\}$ は

初項 $b_1 + 1 = 4 + 1 = 5$

公比 5 の等比数列である

$$b_n + 1 = 5 \cdot 5^{n-1}$$

$$\therefore b_n = 5^n - 1$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ であるから } \frac{1}{a_n} = \frac{5^n - 1}{1}$$

$$\text{逆数をとると } a_n = \frac{1}{5^n - 1}$$

特性方程式
 $x = 5x + 4$
 $\therefore x = -1$

隣接 2 項間型

等比型

【10】 S_n を含む漸化式型

$$\Rightarrow a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$$

【青チャート例題 48 類題】

例 $a_1 = 1, a_{n+1} = S_n + (n+1)$

ただし $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

【解答】

$n = n+1$ のとき

$$a_{n+2} = S_{n+1} + (n+1+1)$$

$$a_{n+2} = S_{n+1} + (n+2)$$

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2} & = & S_{n+1} + (n+2) \\ -) & a_{n+1} & = S_n + (n+1) \\ \hline a_{n+2} - a_{n+1} & = & S_{n+1} - S_n + 1 \end{array}$$

ここで $a_n = S_n - S_{n-1}$ より

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

したがって

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} + 1$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$$

これを变形すると

$$\frac{a_{n+2} + 1}{n+1} = \frac{2(a_{n+1} + 1)}{n}$$

$n+1$ 項目 (公比) $\times n$ 項目

であるから

数列 $\{a_n + 1\}$ は

初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比 2 の等比数列であるので

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

特性方程式
 $x = 2x + 1$
 $\therefore x = -1$

隣接 2 項間型

等比型

□その他基本形を活用した漸化式④

【6】指数型: $a_{n+1} = (a_n)^k$

⇒ 両辺の対数をとって 【5】隣接2項間型①へ

【青チャート例題38類題】

例 $a_1 = 10, a_{n+1} = 10a_n^3$

【解答】 $a_1 = 10 > 0$ で $a_{n+1} = 10a_n^3$ であるから
すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ である。

よって両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} 10a_n^3$$

$$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} 10 + \log_{10} a_n^3$$

$$\log_{10} a_{n+1} = 1 + 3\log_{10} a_n$$

ここで $b_n = \log_{10} a_n$ とすると

$$b_1 = \log_{10} a_1 = \log_{10} 10 = 1$$

$$b_{n+1} = \log_{10} a_{n+1}$$

であるから

$$b_{n+1} = 1 + 3b_n$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$

特性方程式

$$x = 3x + 1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

これを変形すると

$$b_{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left\{b_n - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

隣接2項間型

$$\underbrace{b_{n+1} + \frac{1}{2}}_{n+1 \text{ 項目}} = 3 \underbrace{\left(b_n + \frac{1}{2}\right)}_{\text{公比} \times n \text{ 項目}}$$

等比型

数列 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ は

$$\text{初項 } b_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

公比 3 の等比数列である

$$b_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

$b_n = \log_{10} a_n$ であるから

$$\log_{10} a_n = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

$$\log_{10} a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

対数の定義により $a_n = 10^{\frac{1}{2}(3^n - 1)}$

まとめておいた方が
指数に書きやすい

【3】変比数列型: $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$

⇒ $n = 1, 2, 3, \dots$ を代入して辺々をかける

【青チャート例題40類題】

例 $a_1 = 7, (n+2)a_{n+1} = na_n$

【解答】 漸化式の両辺に $(n+1)$ を掛けると

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n$$

$$b_n = n(n+1)a_n \text{ とおくと } b_{n+1} = b_n$$

$$\text{また } b_1 = 1 \cdot 2 \cdot a_1 = 14$$

$$\text{よって } b_n = 14 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{ゆえに } n(n+1)a_n = 14$$

n は自然数なので $n(n+1) > 0$

$$\text{したがって } a_n = \frac{14}{n(n+1)}$$

【別解】 $n \geq 2$ のとき

$$n = 1 \text{ のとき } 3 \cdot a_2 = 1 \cdot a_1$$

$$n = 2 \text{ のとき } 4 \cdot a_3 = 2 \cdot a_2$$

$$n = 3 \text{ のとき } 5 \cdot a_4 = 3 \cdot a_3$$

(省略)

$$n = n-2 \text{ のとき}$$

$$n \cdot a_{n-1} = (n-2) \cdot a_{n-2}$$

$$n = n-1 \text{ のとき}$$

$$(n+1) \cdot a_n = (n-1) \cdot a_{n-1}$$

辺々掛け算すると

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n \cdot (n+1) a_2 a_3 a_4 \cdots a_n \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} \end{aligned}$$

両辺に共通する項で割り算すると

$$n(n+1)a_n = 1 \cdot 2 \cdot a_1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{2a_1}{n(n+1)} = \frac{2 \cdot 7}{n(n+1)} \\ &= \frac{14}{n(n+1)} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成り立つ

□その他基本形を活用した漸化式④

【1 1】隣接 3 項間型①:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (\text{重解を持たないタイプ})$$

【方針】 $1 \Rightarrow x^2 + px + q = 0$ の 2 つの解を

α, β としたときに

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n)$$

と変形して連立する

【方針】 $2 \Rightarrow a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ において

a_1, a_2 から A, B を求める

【青チャート例題 4 1 類題】

例 $a_1 = 0, a_2 = 1,$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

【解答】 【方針】 1

与式を変形して

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \cdots \textcircled{2}$$

①について

$$a_2 - 2a_1 = 1 - 0 = 1 \text{ なので}$$

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \cdots \textcircled{3}$$

②について

$$a_2 - 3a_1 = 1 - 0 = 1 \text{ なので}$$

$$a_{n+1} - 3a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdots \textcircled{4}$$

③-④より

$$a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

【解答】 【方針】 2

【方針】 1 の特性方程式より

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n \text{ と表せる}$$

そこで

$$n=1 \text{ のとき } a_1 = 2A + 3B = 0$$

$$n=2 \text{ のとき } a_2 = 2^2A + 3^2B = 1$$

$$4A + 9B = 1$$

$$\text{連立すると } A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } a_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot 3^n$$

$$\therefore a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

【1 2】隣接 3 項間型②:

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \quad (\text{重解を持つタイプ})$$

$\Rightarrow x^2 + px + q = 0$ の重解を α としたとき

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

【青チャート例題 4 2 類題】

例 $a_1 = 1, a_2 = 4,$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

【解答】

特性方程式

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

与式を変更して

$$(x-2)^2 = 0 \therefore x=2$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

$n+1$ 項目 $\textcircled{\text{公比}} \times n$ 項目

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は

初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2 = 2$, 公比 2 の

等比数列なので

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

【7】隣接 2 項間型②

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

ここで数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ は

初項 $\frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$ 公差 $\frac{1}{2}$ の

等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

$$\therefore a_n = \frac{n \cdot 2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$$