統計的な推測【確率変数の変換】p.61～62

青チャートB: 例題 68～69

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率変数の変換について知り，確率変数を変換すると期待値，分散の値がどのように変わるかがわかる。

□確率変数の変換（$Y=aX+b$ の期待値・分散・標準偏差）

確率変数 X が右の表に示された分布に従うとする。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

a，b が定数のとき，X の 1 次式

$$Y=aX+b$$

で Y を定めると，Y もまた確率変数になる。Y のとる値は

$$y_k=ax_k+b$$

であり，Y の確率分布は右の表のようになる。

Y	y_1	y_2	……	y_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

X に対して上のような Y を考えることを，**確率変数の変換** という。

確率変数の変換 $Y=aX+b$ によって，その期待値，分散，標準偏差がどのように変わるかを調べてみよう。

確率変数 X の確率分布が右の表のように与えられているとする。a，b を定数とするとき，X に対して $Y=aX+b$ も確率変数であり，その分布は次のようになる。

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

⇩

$Y=aX+b$	ax_1+b	ax_2+b	……	ax_n+b	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

確率は変わらない

よって，Y の期待値については

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{n}y_kp_k=\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)p_k=\sum_{k=1}^{n}(ax_kp_k+bp_k)$$

Σを分配

$$=a\boxed{\sum_{k=1}^{n}x_kp_k}+b\boxed{\sum_{k=1}^{n}p_k}=a\boxed{E(X)}+b$$

$\boxed{\sum_{k=1}^{n}x_kp_k=E(X)}$

$\boxed{\sum_{k=1}^{n}p_k=1}$

したがって，次のことが成り立つ。

> **$aX+b$ の期待値**
>
> X を確率変数，a，b を定数とするとき
>
> $$E(aX+b)=aE(X)+b$$
>
> とくに，$E(aX)=aE(X)$ である。

もとの変数を a 倍して b 足すと
期待値（平均）も
a 倍して b 足すと求められる

統計的な推測【確率変数の変換】 p.61～62

青チャートB: 例題 68～69

例） 1 個のさいころを投げて出る目を X とすると，$E(X)=\dfrac{7}{2}$ である。

このとき，確率変数 $2X+1$ の期待値は

$$E(2X+1)=2E(X)+1=2\cdot\frac{7}{2}+1=8$$ 終

別解 確率分布は次の表のようになるので

X	1	2	3	4	5	6	
$2X+1$	3	5	7	9	11	13	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(2X+1)=3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+7\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+11\cdot\frac{1}{6}+13\cdot\frac{1}{6}=48\cdot\frac{1}{6}=8$$

また，Y の分散については

$$y_k-E(Y)=ax_k+b-\{aE(X)+b\}=a\{x_k-E(X)\}$$ 代入

よって $V(Y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{y_k-E(Y)\}^2p_k=\sum_{k=1}^{n}a^2\{x_k-E(X)\}^2p_k$

k に関係ないもの(a^2)は
Σの外へ

$$=a^2\boxed{\sum_{k=1}^{n}\{x_k-E(X)\}^2p_k}$$

$$=a^2\boxed{V(X)}$$

ゆえに，Y の標準偏差は $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{a^2\cdot V(X)}=|a|\sqrt{V(X)}=|a|\sigma(X)$

別解 $E(X)=m$ とすると $E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b=am+b$

よって，確率変数 $Y=aX+b$ の分散は，

偏差の 2 乗の確率変数 $\{Y-E(Y)\}^2=\{aX+b-(am+b)\}^2$ の期待値であるから，

$\{aX+b-(am+b)\}^2$

$$=(aX+b)^2-2(aX+b)(am+b)+(am+b)^2$$

$$=a^2X^2+2abX+b^2-2(a^2mX+abX+abm+b^2)+a^2m^2+2abm+b^2$$

$$=a^2X^2-2a^2mX+a^2m^2$$

$$=a^2(X-m)^2$$

$$=a^2V(X)$$

統計的な推測【確率変数の変換】 p.61～62

青チャートB: 例題 68～69

$aX+b$ の分散と標準偏差

X を確率変数，a，b を定数とするとき

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

$$V(aX+b)=a^2V(X),$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

期待値はそのまま計算
分散や標準偏差は
計算式をイメージしよう
（数Ⅰのデータの分析のときと同じ）

例３） 1 個のさいころを投げて出る目を X とすると，これまでの例題から

$$E(X)=\frac{7}{2},\ V(X)=\frac{35}{12},\ \sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

このとき，確率変数 $Y=2X+3$ の期待値，分散，標準偏差は，それぞれ次のようになる。

$$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=2\cdot\frac{7}{2}+3=10$$

$$V(Y)=V(2X+3)=2^2V(X)=4\cdot\frac{35}{12}=\frac{35}{3}$$

$$\sigma(Y)=\sigma(2X+3)=2\sigma(X)=2\cdot\frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{\sqrt{105}}{3}$$ 終

補足 $\sigma(2X+3)$ は $\sigma(2X+3)=\sqrt{V(2X+3)}$ から求めることもできる。