統計的な推測【確率変数の和と期待値】p.63～66

青チャートB: 例題 70

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率変数の和や積について知り，その期待値を求めることができるようになろう。

□同時分布

例） 大小 2 個のさいころを投げるとき，それぞれのさいころの出る目を，X，Y とする。

大小 2 個のさいころを投げるという試行で，X，Y の値が定まる。 終

例） 同じ大きさの玉 10 個が入った袋があり，そのうちの 4 個には 1，6 個には 2 と書いてある。

最初に 1 個を取り出し，その玉に書いてある値を X とする。最初に取り出した玉をもどさないで，2 個目を取り出し，その玉に書いてある値を Y とする。このように 2 個の玉を取り出すという試行で，X，Y の値が定まる。 終

X，Y を確率変数とするとき，実数 a，b に対し，$X=a$ かつ $Y=b$ となる確率を $P(X=a,\ Y=b)$ のように表す。

同様に，3 つの確率変数 X，Y，Z についても，$X=a$ かつ $Y=b$ かつ $Z=c$ となる確率を $P(X=a,\ Y=b,\ Z=c)$ のように表す。

大小 2 個のさいころを投げるとき，それぞれのさいころの出る目を X，Y とすると，X，Y は確率変数である。X，Y のとる値はいずれも 1，2，3，4，5，6 であり，

例えば $P(X=1,\ Y=1)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

2 つの確率変数 X，Y について

X のとる値が x_1，x_2，……，x_n

Y のとる値が y_1，y_2，……，y_m

であるとする。

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$$

とおくと，右の表のように，すべての i と j の組合せについて，$(x_i,\ y_j)$ と p_{ij} の対応が得られる。この対応を X と Y の **同時分布** という。

X \ Y	y_1	y_2	……	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	……	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2m}	p_2
⋮		…………			⋮
⋮		…………			⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	……	p_{nm}	p_n
計	q_1	q_2	……	q_m	1

この表から 各 i について $P(X=x_i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=p_i$

各 j について $P(Y=y_j)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=q_j$

となるから，X と Y は，それぞれ下の表の分布に従う。（周辺分布という）

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

Y	y_1	y_2	……	y_m	計
P	q_1	q_2	……	q_m	1

例題３） 2 本の当たりくじを含む 10 本のくじがある。まず A さんがくじを 1 本引き，残りのくじから B さんが 2 本引くとき，A，B　2 人の当たりくじの数を，それぞれ X，Y とする。
X と Y の同時分布を求めよ。

解答　X のとりうる値は 0，1，Y のとりうる値は 0，1，2 で

$$P(X=0)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},\quad P(X=1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$X=0$ のとき，残り 9 本の中に 2 本の当たりくじがあるから，
$X=0$ のとき $Y=0$，1，2 となる確率は，それぞれ

$$\frac{{}_7C_2}{{}_9C_2}=\frac{7}{12},\quad \frac{{}_2C_1\times{}_7C_1}{{}_9C_2}=\frac{7}{18},\quad \frac{{}_2C_2}{{}_9C_2}=\frac{1}{36}$$

ゆえに　$P(X=0,\ Y=0)=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{15}=\frac{21}{45}$

$$P(X=0,\ Y=1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{18}=\frac{14}{45}$$

$$P(X=0,\ Y=2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{45}$$

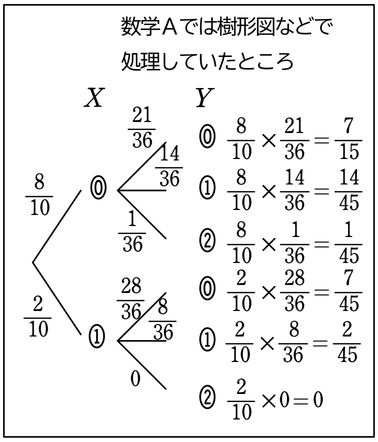
$X=1$ のときも同様に考えると

$$P(X=1,\ Y=0)=\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{45}$$

$$P(X=1,\ Y=1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{45}$$

$$P(X=1,\ Y=2)=0$$

よって，同時分布は右の表のようになる。



X \ Y	0	1	2	計
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{7}{45}$	$\frac{2}{45}$	0	$\frac{1}{5}$
計	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

このとき，X のみに着目すると

$$P(X=0)=\frac{21}{45}+\frac{14}{45}+\frac{1}{45}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5},$$

$$P(X=1)=\frac{7}{45}+\frac{2}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

X	0	1	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

であり，X は確率変数である。また，Y のみに着目すると

$$P(Y=0)=\frac{21}{45}+\frac{7}{45}=\frac{28}{45},$$

$$P(Y=1)=\frac{14}{45}+\frac{2}{45}=\frac{16}{45},$$

$$P(Y=2)=\frac{1}{45}+0=\frac{1}{45},$$

Y	0	1	2	計
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

であり，Y も確率変数である。

統計的な推測【確率変数の和と期待値】 p.63～66

青チャートB：例題 70

□確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X，Y の和を $Z=X+Y$ とすると，Z もまた確率変数である。Z の期待値 $E(Z)$ について考えてみよう。

例えば，2つの確率変数 X，Y の確率分布が

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

で与えられているとする。

右の表のように

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$$

とすると，次のことが成り立つ。

$p_{11}+p_{12}=p_1$，　$p_{21}+p_{22}=p_2$

$p_{11}+p_{21}=q_1$，　$p_{12}+p_{22}=q_2$

X ＼ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	$p_1=p_{11}+p_{12}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$p_2=p_{21}+p_{22}$
計	$q_1=p_{11}+p_{21}$	$q_2=p_{12}+p_{22}$	1

$X=x_i$，$Y=y_j$ のとき $Z=x_i+y_j$ であり，その確率は p_{ij} であるから，

たとえば，$X=x_1$，$Y=y_1$ のとき $Z=x_1+y_1$ で，その確率は p_{11} である。

また $E(X)=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})$，$E(Y)=y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$ である。

$E(Z)$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned}E(Z)&=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}\\&=\{x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})\}+\{y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\}\\&=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y_2q_2)\\&=E(X)+E(Y)\end{aligned}$$

また，$E(aX+bY)=E(aX)+E(bY)$

$\qquad\qquad\qquad=aE(X)+bE(Y)$

でもある。

一般に，2つの確率変数 X，Y の和 $X+Y$ の期待値について，次の等式1が成り立つ。また，1と確率変数の変換の等式から，次の等式2が成り立つことがわかる。

$X+Y$，$aX+bY$ の期待値（期待値の加法定理）

1　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2　$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

係数は外へ，
足し算引き算はばらしてＯＫ

統計的な推測【確率変数の和と期待値】 p.63〜66

青チャートB: 例題 70

例４） 大小 2 個のさいころを投げるとき，それぞれのさいころの出る目を，X，Y とする。

このとき， $E(X)=E(Y)=\dfrac{7}{2}$ 　例２より

であるから，出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$$ 終

問１） 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目，2 回目に出る目を，それぞれ X，Y とする。

確率変数 $4X-2Y$ の期待値を求めよ。

解答 $E(X)=E(Y)=\dfrac{7}{2}$ であるから，出る目の和 $4X-2Y$ の期待値は

係数は外へ，
足し算引き算は
ばらしてＯＫ

$$E(4X-2Y)=4E(X)-2E(Y)=4\cdot\frac{7}{2}-2\cdot\frac{7}{2}=14-7=7$$ 終

例） 500 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げて，表の出た硬貨の金額の和を Z 円とする。

Z の期待値を求めよ。

解答 この試行で，表の出た 500 円硬貨，100 円硬貨の枚数を，それぞれ X，Y とする。

X，Y の確率分布は，どちらも右の表のようになる。

表の枚数	0	1	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

よって　$E(X)=E(Y)=0\cdot\dfrac{1}{2}+1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$Z=500X+100Y$ であるから，Z の期待値は

$$E(Z)=E(500X+100Y)=500E(X)+100E(Y)$$

係数は外へ，
足し算引き算はばらしてＯＫ

$$=500\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}=300$$

3 つ以上の確率変数の和の期待値についても，等式 1 と同様の等式が成り立つ。例えば，3 つの確率変数 X，Y，Z に対して， $E(X+Y+Z)=E(X+Y)+E(Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$

であるから次の等式が成り立つ。

$$\boldsymbol{E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)}$$

同様にして　$E(X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+\cdots\cdots+E(X_n)$

問２） 3 個のさいころを同時に投げるとき，それぞれのさいころの出る目を X，Y，Z とする。

出る目の和 $X+Y+Z$ の期待値を求めよ。

解答 $E(X)=E(Y)=E(Z)=\dfrac{7}{2}$ であるから出る目の和 $X+Y+Z$ の期待値 $E(X+Y+Z)$ は

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$ 終