統計的な推測【二項分布】 p.75～77

青チャートB: 例題 76～77

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】二項分布の考え方を理解しよう

□二項分布

同じ条件のもとでの試行の繰り返しを反復試行という。ここでは，反復試行において，ある事象の起こる回数 X の確率分布について考えよう。

1 個のさいころを 3 回投げるとき，1 の目が出る回数を X とすると，1 の目が r 回出る確率は，反復試行の確率の式により　$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{3-r}$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

である。よって，確率変数 X の確率分布は次のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3$	${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$	${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$	${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0$	1

一般に，反復試行の確率について，次のことが成り立つ。

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回行う反復試行において，A がちょうど r 回起こる確率は

${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$　　ただし，$q=1-p$

数学Aのおさらい

このような n 回の反復試行において，事象 A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，その確率分布は次の表のようになる。

離散的変量の確率分布で二項分布以外に重要なものとしてポアソン分布というものもある

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}$	……	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	……	${}_n\mathrm{C}_n p^n$	1

それぞれの確率が，二項定理による
$(q+p)^n$ の展開式 $(q+p)^n={}_n\mathrm{C}_0 q^n+{}_n\mathrm{C}_1 pq^{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n p^n$
の各項と同じなので， 二項分布と呼ばれている。

この表で与えられる確率分布を **二項分布** といい，

$\boldsymbol{B(n,\ p)}$ で表す。

ただし $0<p<1$，$q=1-p$ とする。

また，**確率変数 X は** **二項分布 $B(n,\ p)$** **に従う**という。

$B(n,\ p)$ の B は，二項分布を意味する英語 binomial distribution の頭文字である。
B (何回行うか，　確率 p の試行を)

$B(n,\ p)$ の記号を用いると確率分布表を示す必要がなく便利

例） 1 枚の硬貨を 10 回投げて，表の出る回数を X とする。

$B\left(10\text{回行う，確率 }\frac{1}{2}\text{ の試行を}\right)$

1 回だけ投げるとき，表の出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから，X は二項分布 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数である。また，たとえば $P(X=3)$ は，次のように計算される。

$P(X=3)={}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^7=\frac{120}{2^{10}}=\frac{15}{128}$ 終

10回中 3 回表が出る反復試行の計算

統計的な推測【二項分布】 p.75～77

青チャートB: 例題 76～77

□二項分布の平均と分散

二項分布 $B(n,\ p)$ の平均と分散を求めてみよう。

1 回の試行で事象 A の起こる確率が p である試行を n 回行うとき，第 k 回目の試行で事象 A が起これば 1，起こらなければ 0 の値をとる確率変数を X_k とする。このとき

$$P(X_k=1)=p,\quad P(X_k=0)=q \quad \text{ただし}\ q=1-p$$

X_k	0	1	計
P	q	p	1

ゆえに　$E(X_k)=1\cdot p+0\cdot q=p$

$$E(X_k{}^2)=1^2\cdot p+0^2\cdot q=p$$

から　$V(X_k)=E(X_k{}^2)-\{E(X_k)\}^2=p-p^2=p(1-p)=pq$

いま，$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ とおくと，確率変数 X は n 回の反復試行において A が起こる回数を示すから，二項分布に従う。

X	X_1	X_2	X_3	$\cdots$	X_n
0	0	0	0	$\cdots$	0
1	1	0	0	$\cdots$	0
1	0	1	0	$\cdots$	0
1	0	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	0	$\cdots$	1
2	1	1	0	$\cdots$	0
2	1	0	1	$\cdots$	0
2	0	1	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	0	0	0	$\cdots$	1
3	1	1	1	$\cdots$	0
3	1	1	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	1	1	$\cdots$	1

確率変数の和の期待値 (平均) の性質を使うと

$$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)\\&=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)\\&=p+p+\cdots\cdots+p\\&=np\end{aligned}$$

また，確率変数 X_1，X_2，……，X_n は**互いに独立**であるから，分散はそれぞれの分散の和となる。よって

$$\begin{aligned}V(X)&=V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)\\&=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)\\&=pq+pq+\cdots\cdots+pq\\&=npq\end{aligned}$$

したがって，次のことが成り立つ。

二項分布の平均，分散，標準偏差

B (何回行うか，確率 p の試行を)

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

$$\boldsymbol{E(X)=np,\quad V(X)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}}$$

統計的な推測【二項分布】p.75～77

青チャートB: 例題 76～77

補足 $n=3$ **のときの例**

X_k	0	1	計
P	q	p	1

1 回の試行において，事象 A の起こる確率を p とし，この試行を 3 回行うとする。$k=1$，2，3 に対して，k 回目の試行でA が起これば 1，A が起こらなければ 0 の値をとる確率変数 X_k を考える。この反復試行において，A が起こる回数を Xとすると，$X=X_1+X_2+X_3$と表され，

Xは二項分布 $B(3,\ p)$ に従うとき，Xの確率分布は，表のようになる。

ただし，$q=1-p$ である。

X	X_1	X_2	X_3
0	0	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
2	1	1	0
2	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	1

X	0	1	2	3	計
P	q^2	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

よって　この分布の確率変数 Xの期待値と分散を，それぞれ定義にもとづいて計算して求めてみよう。

$q=1-p$ とする。

$$E(X)=0\cdot q^3+1\cdot 3pq^2+2\cdot 3p^2q+3\cdot p^3$$
$$=3p(q^2+2pq+p^2)=3p(p+q)^2=3p$$

$p+q=1$

また，$E(X^2)=0^2\cdot q^3+1^2\cdot 3pq^2+2^2\cdot 3p^2q+3^2\cdot p^3$

$$=3p(3p^2+4pq+q^2)=3p(p+q)(3p+q)=3p(3p+q)$$

$p+q=1$

よって　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=3p(3p+q)-(3p)^2$$
$$=3pq$$

$n=3$ のときと同じになる

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3pq}$$

一般に，次のことが成り立つ。

二項分布に従う確率変数の期待値，分散，標準偏差

確率変数 Xが二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき

期待値は　$E(X)=np$

分散は　$V(X)=npq$　　ただし，$q=1-p$

標準偏差は　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

B（何回行うか，確率 p の試行を）

例題５改） 1 個のさいころを 10 回投げて，1 の目が出る回数を Xとする。

Xの期待値と分散および標準偏差を求めよ。

解答 さいころを 1 回投げて，1 の目が出る確率 p は　$p=\dfrac{1}{6}$

よって，Xは二項分布 $B\left(10,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから　Xの期待値は　$E(X)=10\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{3}$

$n=10,\ p=\dfrac{1}{6}$

Xの分散は　$V(X)=10\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{50}{36}$

Xの標準偏差は　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{50}{36}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

統計的な推測【二項分布】 p.75～77

青チャートB: 例題 76～77

コインを投げるときの「表」と「裏」のように、二種類の結果を取りうる試みがあったときに、このような試行のことを ベルヌーイ試行 と呼びます。二つの事象を $X=1$, $X=0$ とすると、$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$ であり、 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}\ (k=0,1)$ とも表せます。これらの分布のことを ベルヌーイ分布 と呼びます。ベルヌーイ分布は二項分布の試行回数が $n=1$ の場合の特殊な例と考えられます。

ヤコブ・ベルヌーイ
Jakob Bernoulli
1654/12/27－1705/8/16

□二項分布のグラフ

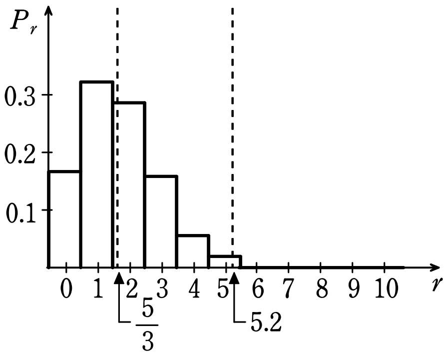
例題 5 で，$X=r$ となる確率を P_r とすると

$$P_r={}_{10}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{10-r}$$

である。

P_0, P_1, P_2, ……, P_{10}

の値を計算して分布を図示すると右の図のようになる。



この図から，さいころを 10 回投げたとき，ある特定の目が出る回数を考えてみると，その目が期待値 $\frac{5}{3}$ ≒1.6667 に近い回数だけ出る確率が大きいことがわかる。また，例えば，期待値から標準偏差 $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ ≒1.1785 の 3 倍大きい値は約 5.2 となるが，5.2 以上の回数でその目が出る確率は非常に小さい。言い換えると，出る目の回数 X は

$$0\leqq X\leqq E(X)+3\sigma(X)\fallingdotseq 5.2$$

の範囲にほぼ収まる。