統計的な推測【正規分布】 p.81～84

青チャートB: 例題 80～81

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

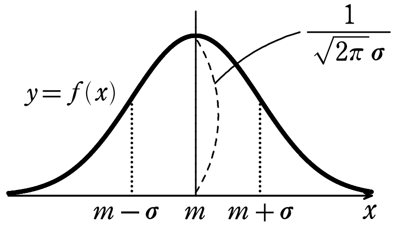
【内容目標】正規分布の考え方を理解しよう

□正規分布

連続型確率変数の分布の代表的なものに，正規分布と呼ばれる分布がある。自然現象や社会現象の中には，観測される値の分布が正規分布に近いものがあり，このとき正規分布が有効に利用される。

m を実数，σ を正の実数とする。このとき，関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \cdots ①$$



とおくとき，$f(x)$ は連続型確率変数 X の確率密度関数となることが知られている。

このとき，X は **正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$** に従うといい，曲線 $y=f(x)$ を **正規分布曲線** という。

$N(m,\ \sigma^2)$ の N は，正規分布を意味する英語 normal distribution の頭文字である。

ここで，e は無理数で，その値は $e=2.71828\cdots\cdots$ である。

自然対数の底 e は 数学Ⅲの微分法で学びます

正規分布について，次のことが知られている。

正規分布に従う確率変数の期待値，標準偏差

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

期待値は　$E(X)=m$，

標準偏差は　$\sigma(X)=\sigma$

N(期待値，分散)

正規分布はアブラーム・ド・モアブルによって1733年に導入された。

その後、1809年のカール・フリードリヒ・ガウスによる誤差論で詳細に論じられたため，ガウス分布とも言われる。

また，曲線と x 軸で囲まれた部分の面積は 1，すなわち $f(x)>0$ であって，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ となる。この定積分はガウス積分と呼ばれる

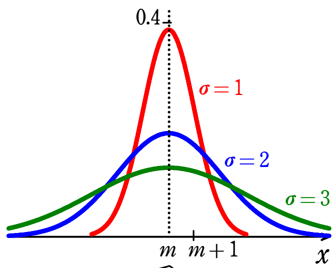
この m，σ を，それぞれ正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ の平均，標準偏差という。正規分布曲線は，次の性質をもつ。

正規分布曲線の性質

1　直線 $x=m$ に関して対称であり，y は $x=m$ で最大値をとる。

2　x 軸を漸近線とし，x 軸と分布曲線の間の面積は 1 である。

3　標準偏差 σ が大きくなると曲線の山は低くなって横に広がる。σ が小さくなると曲線の山は高くなって，直線 $x=m$ の周りに集まる。



○　平均値と最頻値と中央値が一致する。

○　標準偏差の位置で変曲点となる。

＜補足＞　曲線が限りなく近づく直線をその曲線の漸近線という。

標準偏差が大きくなる⇒散らばる ⇒なだらかになる

標準偏差が小さくなる⇒集中する ⇒山が高くなる

正規分布曲線

深める　上の関数 ① について，等式 $f(m-a)=f(m+a)$ が成り立つことを確かめよう。
この等式は，正規分布曲線のどのような性質を表しているだろうか。

□標準正規分布

a，b を定数とする。確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$aX+b$ は正規分布 $N(am+b,\ a^2\sigma^2)$ に従う確率変数であることが知られている。

とくに，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従い，

> $Y=aX+b$ のとき
> $E(Y)=aE(X)+b$
> $V(Y)=a^2V(X)$

Z の確率密度関数は，$f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ となる。**正規分布** $N(0,\ 1)$ を **標準正規分布** という。

正規分布と標準正規分布

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

> $Z=\dfrac{X-\text{期待値(平均)}}{\text{標準偏差}}$

とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

補足　$E(X)=m$，$\sigma(X)=\sigma$ より　確率変数 Z の期待値，標準偏差は

$$E(Z)=E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=E\left(\frac{1}{\sigma}\cdot X-\frac{m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\cdot m-\frac{m}{\sigma}=0$$

$$\sigma(Z)=\sigma\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\sigma\left(\frac{1}{\sigma}\cdot X-\frac{m}{\sigma}\right)=\left|\frac{1}{\sigma}\right|\cdot\sigma=1$$

例）　確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，

$m=1$，$\sigma=2$ より，　$\boxed{Z=\dfrac{X-m}{\sigma}}$

> このような変数変換を **標準化** するという

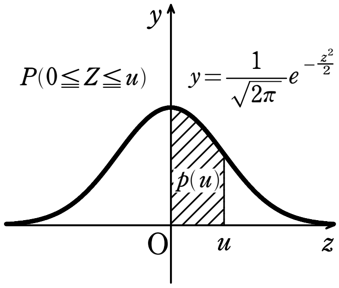
確率変数 $Z=\dfrac{X-1}{2}$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　終

統計的な推測【正規分布】 p.81～84

青チャートB: 例題 80～81

正規分布に従う確率変数 X に対して，確率 P $(a \leqq X \leqq b)$ などは標準正規分布を利用して求めることができる。まずは，標準正規分布に従う確率変数について，具体的に確率を求める方法を調べてみよう。



標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z に対し，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ を $p(u)$ で表すとき， $p(u)$ は右の図の斜線の部分の面積に等しい。いろいろな u の値に対する $p(u)$ の値を表にまとめたものが，**正規分布表**である。

$P(Z \geqq u)$ を $p(u)$ と表すものもある

u	…………	.03	
⋮		↓	
1.2	→	0.3907	
⋮			

$p(1.23)=0.3907$

正規分布表の見方

この表によると，たとえば

$P(0 \leqq Z \leqq 1.23)=p(1.23)=0.3907$　である。

また，次の等式が成り立つ。（ $0 \leqq u \leqq v$ とする）

[1] $P(-u \leqq Z \leqq 0)=P(0 \leqq Z \leqq u)=p(u)$

[2] $P(Z \leqq 0)=P(Z \geqq 0)=0.5$

[3] $u \leqq v$ のとき

$P(u \leqq Z \leqq v)=p(v)-p(u)$

[4] $P(-u \leqq Z \leqq u)=p(u)+p(v)$

[5] $P(Z \leqq -u)=P(Z \geqq u)=0.5-p(u)$

[6] $P(Z \geqq -u)=P(Z \leqq u)=0.5+p(u)$

例１０） (1) $P(0 \leqq Z \leqq 1)=p(1)=0.3413$ 　正規分布表から

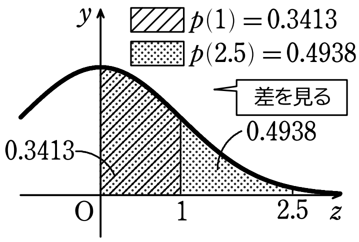
(2) $P(1 \leqq Z \leqq 2.5)=p(2.5)-p(1)$ 　正規分布表から

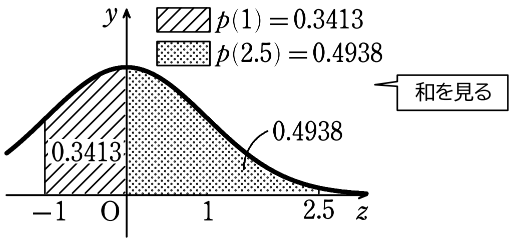
$=0.4938-0.3413=0.1525$

(3) $P(-1 \leqq Z \leqq 2.5)=P(-1 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 2.5)$

$=P(0 \leqq Z \leqq 1)+P(0 \leqq Z \leqq 2.5)$ 　正規分布表から

$=p(1)+p(2.5)=0.3413+0.4938=0.8351$ 　終





統計的な推測【正規分布】 p.81～84

青チャートB: 例題 80～81

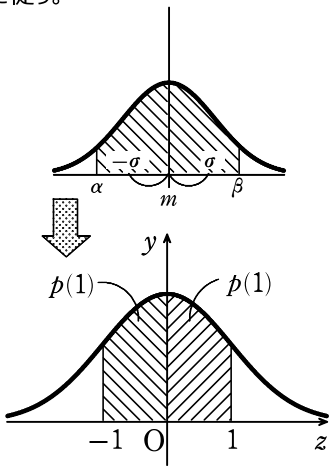
例題６） 確率変数 X が正規分布 $N(4,\ 5^2)$ に従うとき，確率 $P(-1 \leqq X \leqq 9)$ を求めよ。

解答　X が $N(4,\ 5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-4}{5}$ は $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=-1$ のとき $Z=\dfrac{-1-4}{5}=-1$，

$X=9$ のとき $Z=\dfrac{9-4}{5}=1$　であるから

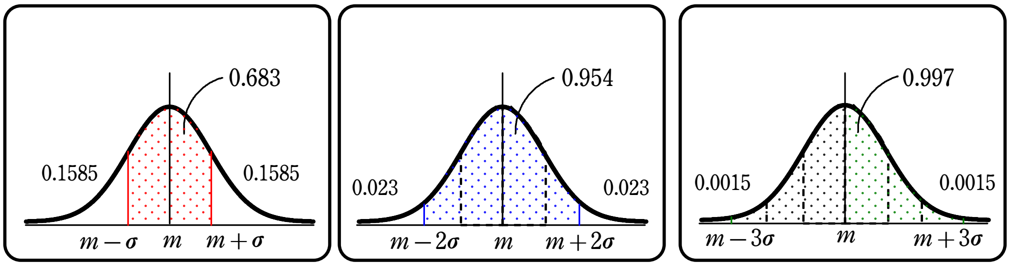
$$
\begin{aligned}
&P(-1 \leqq X \leqq 9) \\
&\quad =P(-1 \leqq Z \leqq 1) \\
&\quad =2P(0 \leqq Z \leqq 1) \\
&\quad =2p(1) \\
&\quad =2\cdot 0.3413 \\
&\quad =0.6826
\end{aligned}
$$



また，確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，その確率について次が成り立つことが知られている。

$$
\left.
\begin{aligned}
&P(m-\sigma \leqq X \leqq m+\sigma) \fallingdotseq 0.683 \\
&P(m-2\sigma \leqq X \leqq m+2\sigma) \fallingdotseq 0.954 \\
&P(m-3\sigma \leqq X \leqq m+3\sigma) \fallingdotseq 0.997
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots ①
$$

であることが知られている。



このことは，たとえば X が $m-\sigma \leqq X \leqq m+\sigma$ を満たす確率は約 68.3 %，

$m-2\sigma \leqq X \leqq m+2\sigma$ を満たす確率は約 95.4 %であることを意味する。

深める　例題 6 で求めた確率は，上の ① の $P(m-\sigma \leqq X \leqq m+\sigma) \fallingdotseq 0.683$ の場合である。

他の 2 つの式について，正規分布表を利用して確かめてみよう。

□正規分布の応用

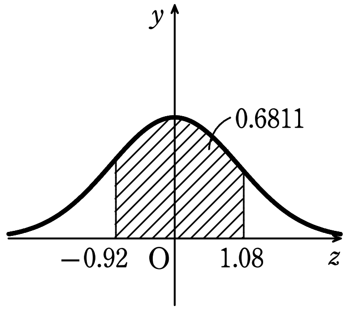
応用例題１） ある県における高校 2 年生の男子の身長が，平均 170.6 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。このとき，身長が 166 cm 以上 176 cm 以下の生徒は，約何 % いるか。

考え方　身長を X cm，$m=170.6$，$\sigma=5$ として，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ を考える。

$P(166\leqq X\leqq 176)=a$ のとき，$100a$ %の生徒がいることになる。

解答　身長を X cm とする。確率変数 X が正規分布 $N(170.6,\ 5^2)$ に従うとき，

$Z=\dfrac{X-170.6}{5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。



$X=166$ のとき　$Z=\dfrac{166-170.6}{5}=\dfrac{-4.6}{5}=-0.92$，

$X=176$ のとき　$Z=\dfrac{176-170.6}{5}=\dfrac{5.4}{5}=1.08$

よって

$$\begin{aligned}P(166\leqq X\leqq 176)&=P(-0.92\leqq Z\leqq 1.08)\\&=p(0.92)+p(1.08)\\&=0.3212+0.3599=0.6811\end{aligned}$$

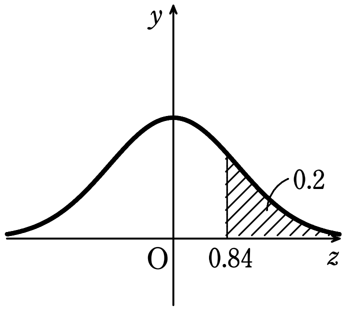
したがって，約 68 % いる。

問５） 応用例題 1 について，次の問いに答えよ。

(1)　$P(Z\geqq u)=0.2$ となる u の値を求めよ。

(2)　身長の高い方から 20 % の中に入るのは，何 cm 以上の生徒か。
　最も小さい整数値で答えよ。

解答



(1)　$P(Z\geqq u)=0.2$ から，$u>0$ であり，

$$P(Z\geqq u)=0.5-P(0\leqq Z\leqq u)=0.5-p(u)$$

であるから

$$0.5-p(u)=0.2$$

よって　$p(u)=0.5-0.2=0.3$

ゆえに，正規分布表から　$u\fallingdotseq 0.84$

(2)　(1) から　$P(Z\geqq 0.84)=0.2$

よって　$\dfrac{X-170.6}{5}\geqq 0.84$

これを解いて　$X\geqq 174.8$

したがって，175 cm 以上の生徒である。

コラム **偏差値**

試験の成績を「偏差値」という数値で表すことがあります。平均点が m，標準偏差が σ である試験において，得点が X 点であるとき，偏差値 T は以下の式で計算することができます。

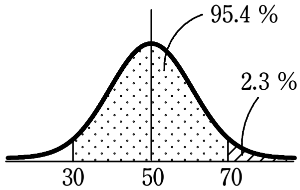
$$T=10\times\frac{X-m}{\sigma}+50 \quad \cdots\cdots ①$$

ここでは，試験の得点 X を確率変数としたとき，X は正規分布に従うとみなして考えてみましょう。

得点 X が平均 m，標準偏差 σ の正規分布に従うとみなすと，

① の式で得られる偏差値 T の平均（期待値）は $10\times\frac{m-m}{\sigma}+50=50$，

標準偏差は $\left|\frac{10}{\sigma}\right|\times\sigma=10$



上の結果から，偏差値 T は平均が 50，標準偏差が 10 である正規分布に従うとみなすことができます。

このとき，　$P(50-2\cdot10\leqq T\leqq 50+2\cdot10)\fallingdotseq 0.954$

すなわち　　$P(30\leqq T\leqq 70)\fallingdotseq 0.954$

となり，偏差値が 30 から 70 の間に受験者の約 95.4 %が含まれることがわかります。

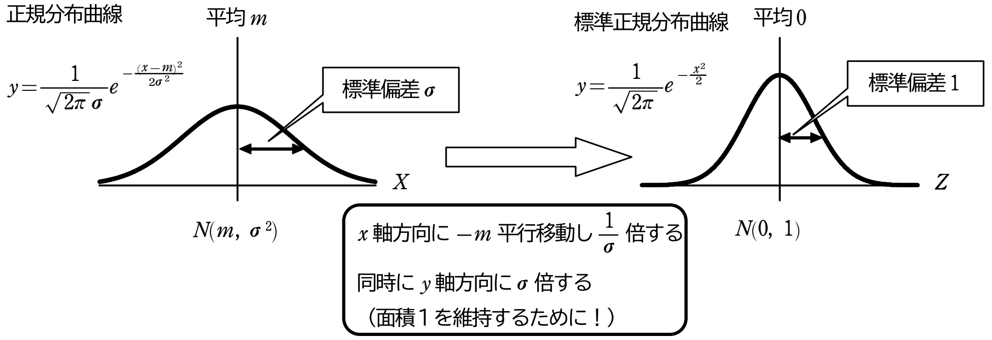
したがって，偏差値 70 以上の受験者は全体の約 2.3 %であることから，受験者が 1 万人であれば，偏差値 70 である人は大体 230 位の位置にいると考えられます。

補足

自然界の事象の中には正規分布に従うものがあることが知られています。また、そのままでは変数が正規分布に従わない場合もその対数をとると正規分布に従う場合があります。

正規分布が統計学上特別な地位を持つのは中心極限定理が存在するためです。自然界の事象の中には、正規分布に従うものがあることが知られていますが、それは必ずしも多数派というわけではありません。19世紀ではさながら「正規分布万能主義」といったものがまかり通っていましたが、20世紀以降そういった考え方に修正が見られ、今日においては社会現象、生物集団の現象等々、種別から言えば、正規分布に従うものはむしろ少数派であることが確認されています。

補足　標準化を視覚的に理解するには？



◎ 文中では確率変数 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ の変換から標準正規分布の平均値と分散を確認したが，

偶関数（左右対称）

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ から平均値と分散を確認してみよう

【平均値】 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\int_p^q x\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \qquad (\ xf(x)\ \text{は奇関数})$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_p^q(-x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\Big[e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_p^q$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{q^2}{2}}-e^{-\frac{p^2}{2}}\right)$$

$$=0$$

【分　散】 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=E(X^2)-0=E(X^2)$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx$$

$$=\lim_{p\to-\infty,\ q\to\infty}\int_p^q x^2\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^q x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (\because\ x^2f(x)\ \text{は偶関数})$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^q(-x)\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\Big[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^q-\int_0^q\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\right\}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{-qe^{-\frac{q^2}{2}}+\int_0^q e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right\}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\frac{q}{e^{\frac{q^2}{2}}}+\int_0^q e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right\}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^q e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\quad(\because \text{ガウス積分より})$$

$$=1$$

したがって　$V(X)=E(X^2)=1$

補足　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ が確率密度関数になることを確認する

まず，$y=f(x)$ の変数は，確率変数 X の実現値をして扱うことが前提である。

ここで，すべての変数 x について $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\geqq 0$ は成り立つ

次に $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$ を満たせばよい

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$z=\frac{x-m}{\sigma}$ として置換すると　$dz=\frac{1}{\sigma}dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $(a>0)$ ガウス積分

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

$$=1$$

以上より　$y=f(x)$ は，確率密度関数になることが確認できる。

証明　正規分布曲線の性質を確認しよう

①　平均値 m を中心にして左右対称

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ より　$f(m+x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ また $f(m-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

よって　$f(m+x)=f(m-x)$

つまり，$y=f(x)$ は，直線 $y=m$ に関して対称である。

② 平均値と最頻値と中央値が一致する

・ $N(m,\ \sigma^2)$ の分布だから，平均値は m である

・ $y=f(x)$ は，直線Mx＝mに関して対称だから，中央値は m である。

・ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left\{-\frac{2(x-m)}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot(m-x)$$

x	$\cdots$	m	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$	$\searrow$

増減表より， $y=f(x)$ は， $x=m$ で極大かつ最大となり，最頻値は m である。

③ 標準偏差が大きくなると曲線の山は低くなり，標準偏差が小さくなると曲線の山は高くなる

$y=f(x)$ は， $x=m$ で極大かつ最大となるので，最大値は　$f(m)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

標準偏差 σ が大きくなると，最大値は小さくなり，曲線の山は低くなる

標準偏差 σ が小さくなると，最大値は大きくなり，曲線の山は高くなる

④ x 軸が漸近線である。

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

よって， x 軸が漸近線である。

⑤ 標準偏差の位置で変曲点になる。

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot(m-x)$ より，

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\left\{-\frac{x-m}{\sigma^2}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}(m-x)-e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\left\{-\frac{x-m}{\sigma^2}(m-x)-1\right\}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^5}\{(m-x)^2-\sigma^2\}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

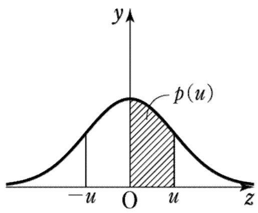
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^5}\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\cdot(x-m-\sigma)(x-m+\sigma)$$

$f''(x)=0$ は $x=m-\sigma$，$x=m+\sigma$ を解とするので

$x=m-\sigma$，$x=m+\sigma$ の直前と直後で $f''(x)$ の符号が変わるので，

$y=f(x)$ は標準偏差の位置で変曲点となる。

正規分布表



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900