統計的な推測【二項分布の正規分布による近似】p.85～86

青チャートB: 例題 82

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】二項分布のグラフについて n を大きくして正規分布曲線に近似させる考え方を理解しよう

□二項分布の正規分布による近似

正規分布と二項分布の関係について考えよう。

1 個のさいころを n 回投げるとき，1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従い，X の期待値と分散は次のようになる。

期待値は　$m=\dfrac{n}{6}$，　分散は　$\sigma^2=n\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5n}{36}$

二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う確率変数 X について，$X=r$ となる確率を　$n=10,\ 20,\ 30,\ 50$　の各場合について計算すると，確率 P_r は右の表のようになり，折れ線グラフをかくと下の図のようになる。

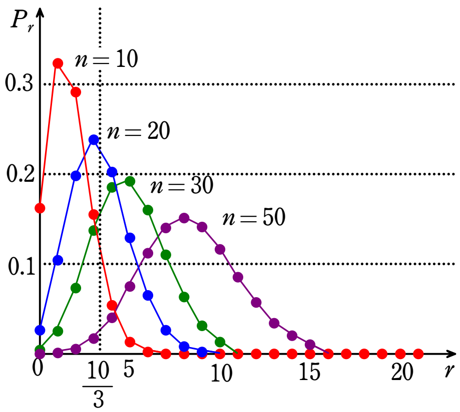
P_r \ n	10	20	30	50
P_0	0.162	0.026	0.004	0.000
P_1	0.323	0.104	0.025	0.001
P_2	0.291	0.198	0.073	0.005
P_3	0.155	0.238	0.137	0.017
P_4	0.054	0.202	0.185	0.040
P_5	0.013	0.129	0.192	0.075
P_6	0.002	0.065	0.160	0.112
P_7	0.000	0.026	0.110	0.140
P_8	:	0.008	0.063	0.151
P_9	:	0.002	0.031	0.141
P_{10}	:	0.000	0.013	0.116
:		:	:	:

B(回数，確率) なので反復試行の回数が増えていくとどうなるかを考える

図から予想されるように，二項分布 $B(n,\ p)$ のグラフは，

n が大きくなるにつれて，

左右対称な正規分布曲線と似てくる。



なお，n が大きいときは，P_r の値が小さくなるので，P_r の目盛りの幅を大きくとると見やすくなる。

この図から，たとえば $n=20$ の場合の 1 の目が出る回数について確率を考えてみると，期待値

$$20\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

に近い回数ほど出る確率が大きいことがわかる。

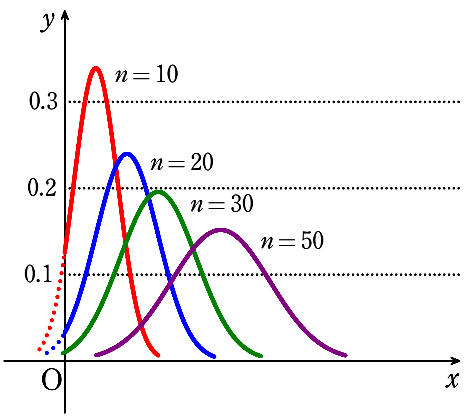
そこで，

$$m=\frac{n}{6},\quad \sigma^2=\frac{5n}{36}$$

である正規分布曲線を，

$n=10,\ 20,\ 30,\ 50$

の各場合についてかいてみると，右の図のようになる。



二項分布と正規分布

ゴルトンボード

一般に，二項分布 $B(n,\ p)$ において，確率 P_r を最大にする r の値を求めるには，次のようにする。

$$P_{r+1}={}_n\mathrm{C}_{r+1}\cdot p^{r+1}\cdot q^{n-r-1}\ ,\quad P_r={}_n\mathrm{C}_r\cdot p^r\cdot q^{n-r}$$

より $\dfrac{P_{r+1}}{P_r}=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{r+1}\cdot p^{r+1}\cdot q^{n-r-1}}{{}_n\mathrm{C}_r\cdot p^r\cdot q^{n-r}}=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_{r+1}}{(r+1)!}\cdot\dfrac{r!}{{}_n\mathrm{P}_r}\cdot\dfrac{p}{q}=\dfrac{n-r}{r+1}\cdot\dfrac{p}{q}$

$\dfrac{P_{r+1}}{P_r}>1$ とすると　$(n-r)p>(r+1)q$

よって　$np-q>(p+q)r$　$\therefore\ np-q>r$

$r<np-q$ のとき　$P_r<P_{r+1}$

$r>np-q$ のとき　$P_r>P_{r+1}$

したがって，n が大きいとき，

$np-q=n\left(p-\dfrac{q}{n}\right)$ より

P_r を最大にする r の値は np に近いことがわかる。

ド・モアブル－ラプラスの定理

確率変数 X_n の分布が二項定理 $B(n,\ p)$ であるとき

X_n を標準化した確率変数を

$$Z_n=\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}$$

とおくと，任意の $a,\ b\ (a<b)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}P(a<Z_n<b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

が成り立つ。

n が十分に大きいときは，

Z_n はほぼ（近似的に）標準正規分布に従う。

（→p.96 以降で扱っています）

一般に，次のことが成り立つ。

二項分布の正規分布による近似

1　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N(np,\ npq)$ に従う。ただし，$q=1-p$ である。

2　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X に対し，$Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は，n が大きいとき，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

二項分布なので
期待値 $=np$
分散 $=npq$

X の標準化
$Z=\dfrac{X-\text{期待値}}{\text{標準偏差}}$

統計的な推測【二項分布の正規分布による近似】p.85～86

青チャートB: 例題 82

例題７） 1 個のさいころを 720 回投げて，1 の目が出る回数を X とするとき，X が 100 以下の値をとる確率を求めよ。

B(回数，確率)

解答　1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ で，X は二項分布 $B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従い，

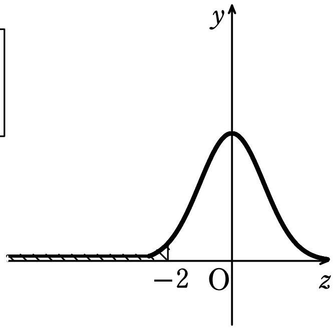
その期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=720\cdot\frac{1}{6}=120$$

$$\sigma=\sqrt{720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}$$

$$=\sqrt{100}=10$$

二項分布なので
期待値$=np$
分散$=npq$ ⇒ 標準偏差$=\sqrt{分散}$



$B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う確率変数 X は，n が大きいとき，

近似的に正規分布 $N(120,\ 10^2)$ に従う。

よって，$Z=\dfrac{X-120}{10}$ は近似的に

X の標準化　$Z=\dfrac{X-期待値}{標準偏差}$

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=100$ のとき　$Z=\dfrac{100-120}{10}=-2$

ゆえに，求める確率 $P(X\leqq 100)$ は

$$P(X\leqq 100)=P(Z\leqq -2)$$

$$=P(Z\geqq 2)$$

$$=0.5-p(2)$$

正規分布表より

$$=0.5-0.4772$$

$$=0.0228$$

補足　二項分布によるヒストグラムと正規分布に従う確率密度関数を比べると
$P(a\leqq X\leqq b)\fallingdotseq P(a-0.5\leqq Y\leqq b+0.5)$
と置き換えた方が近似度がよくなる。
この方法を半整数補正という。