統計的な推測【標本平均とその分布】p.93～95

青チャートB: 例題 84～85

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】標本平均から母集団を推測する方法を整理していこう

母平均と標本平均、母標準偏差と標本の標準偏差の違いを理解しよう

□標本平均の期待値と標準偏差

母集団から大きさ n の無作為標本を抽出し，それらの変量 x の値を X_1，X_2，……，X_n とするとき，

$$\text{これらの平均}\quad \overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

を **標本平均** という。n を固定すると，標本平均 $\overline{X}$ は 1 つの確率変数になる。

標本平均

また，

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2}$$

標本平均との差の 2 乗の平均にルートを付けたもの

を **標本標準偏差** という。

X_1，X_2，……，X_n は，標本を抽出するという試行の結果により値の定まる確率変数である。したがって，$\overline{X}$，S も，標本を抽出するという試行の結果により値の定まる確率変数である。

問７） 4 枚のカードに，それぞれ 1，2，3，4 の数字が書いてある。この 4 枚のカードからなる母集団から，次のような方法で大きさ 2 の無作為標本を抽出し，そのカードの数字を順に X_1，X_2 とする。標本平均 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ の確率分布を，次のそれぞれの場合に求めよ。

(1) 復元抽出

$\overline{X}$	1	2	3	4
1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
3	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
4	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4

$\overline{X}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

(2) 非復元抽出

1 ― 2～ $\frac{3}{2}$，3～ 2，4～ $\frac{5}{2}$

2 ― 1～ $\frac{3}{2}$，3～ $\frac{5}{2}$，4～ 3

3 ― 1～ 2，2～ $\frac{5}{2}$，4～ $\frac{7}{2}$

4 ― 1～ $\frac{5}{2}$，2～ 3，3～ $\frac{7}{2}$

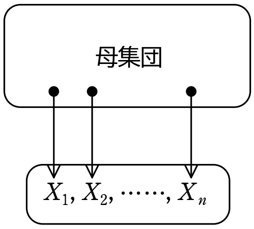
$\overline{X}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

統計的な推測【標本平均とその分布】p.93～95

青チャートB: 例題 84～85

標本平均 $\overline{X}$ の確率分布と母集団分布の関係を調べてみよう。
母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出し，その標本のもつ変量 x の値として定まる確率変数を X_1，X_2，……，X_n とする。この抽出が復元抽出の場合，これらの各変数は，大きさ 1 の標本の確率変数とみなされ，それぞれ母集団分布に従うから

互いに独立である



$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots\cdots=E(X_n)=m$$

$$\sigma(X_1)=\sigma(X_2)=\cdots\cdots=\sigma(X_n)=\sigma$$

したがって，$\overline{X}$ の期待値と標準偏差は，

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\{E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)\}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot nm=m$$

【おさらい】
$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
特に X_1，X_2，……，X_n に対して
$E(X_1+\cdots+X_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)$
$V(aX)=a^2V(X)$
復元抽出のときは X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であり
$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$
$=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)$
$=n\sigma^2$

X_1，X_2，……，X_n は互いに独立な確率変数であるから

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V\left(\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)}$$
$$=\sqrt{V\left(\frac{X_1}{n}\right)+V\left(\frac{X_2}{n}\right)+\cdots\cdots+V\left(\frac{X_n}{n}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}\{V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)\}}$$

$V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2$

$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2}=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\sigma>0$ に注意

非復元抽出による無作為標本の場合も，母集団の大きさが標本の大きさ n に比べて十分大きいときは，復元抽出の場合と同様に考えてよい。

非復元抽出の場合も，標本の大きさ n に比べて母集団の大きさが十分大きいときは，復元抽出と同様に扱ってよいことが知られている。

したがって，次のことが成り立つ。

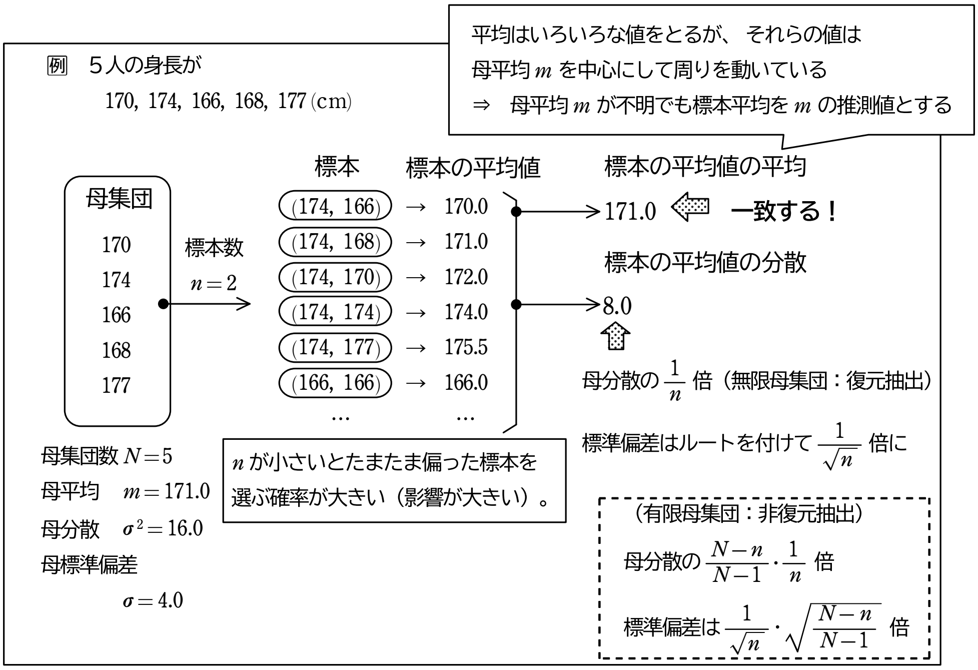
標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差は

$$E(\overline{X})=m,\qquad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

例１３）　母平均 60，母標準偏差 5 の母集団から，大きさ 25 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差は

$$E(\overline{X})=60,\quad \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1$$　終



例題８） 箱の中に製品が多数入っていて，その中の不良品の割合は $\frac{1}{6}$ である。この箱の中から，

標本として無作為に 30 個の製品を抽出するとき，k 番目に抽出された製品が不良品なら 1，

良品なら 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする。

標本平均 $\overline{X}=\frac{1}{30}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{30})$ の期待値と標準偏差を求めよ。

解答　母集団は製品全体であるが，母集団における変量は，不良品のとき 1，良品のとき 0 という 2 つの値をとる。その場合の母平均 m と母標準偏差 σ は

X_k	0	1	計
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$m=1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\sigma=\sqrt{\left(1^2\cdot\frac{1}{6}+0^2\cdot\frac{5}{6}\right)-m^2}=\sqrt{\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{36}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

したがって，$\overline{X}$ の期待値と標準偏差は

$$E(\overline{X})=m=\frac{1}{6}\qquad\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{6}}{36}$$