統計的な推測【仮説検定】p.104～106

青チャートB: 例題 92～94

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】正規分布を利用した仮説検定の方法について理解できる。

○数学Ⅰで学んだ仮説検定について，正規分布を利用する方法を学ぼう。

□仮説検定（hypothesis testing）

ある 1 枚の硬貨を 100 回投げたところ，表が 61 回出た。この結果から，**「このコインは表と裏の出やすさに偏りがある」**と判断してよいだろうか。

コインの表が出る確率を p とする。表と裏の出やすさに偏りがあるとすると，表が出る確率と裏が出る確率は等しくないから，次の [1] がいえる。

[1]　$p \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0.5$

ここで，[1] の主張に反する次の仮定を立てよう。

[2]　$p=0.5$　　[1] に反する仮定→「表と裏が出る確率は等しい」と仮定

と仮定する。この仮定のもと，硬貨を 100 回投げて表が 61 回出る確率について考えよう。ただし，ここでは起こる可能性が低いと判断する基準となる確率を 0.05 とする。

標本抽出の結果以上に極端な場合を含めた確率を求めよう

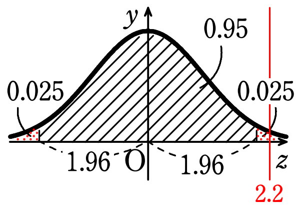
[2] の仮定のもとでは，1 枚のコインを 100 回投げて表が出る回数 X は，二項分布 $B(100,\ 0.5)$ に従う確率変数になる。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$m=100\times0.5=50$,

$\sigma=\sqrt{100\times0.5\times0.5}=5$

であるから，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。



正規分布表から

$P(-1.96\leqq Z\leqq1.96)\fallingdotseq0.95$

である。このことは，[2] の仮定のもとで

$Z\leqq-1.96$　または　$1.96\leqq Z$　……①

という事象は，確率 0.05 でしか起こらないことを示している。

$X=61$ のとき $Z=\dfrac{61-50}{5}=2.2$ であり，$Z=2.2$ は ① の範囲に含まれている。

したがって，$X=61$ という結果は起こる可能性の低いことが起きたということになる。

そこで，[2] が正しくて，しかも起こる可能性が 0.05 という低いことが起きたと考えるよりは，そもそも [2] の仮定が正しくなかった，すなわち [1] が正しく，表と裏の出方に偏りがあると判断した方が適切かもしれない。

数学Ⅰのおさらい

主張 [1] が正しいと判断できるか

対立仮説(Alternative hypothesis，H_a や H_1 で表す)という

主張 [2]（主張 [1] と反する仮定）を立てる

帰無仮説(きむかせつ null hypothesis H_0 で表す)という「無に帰する予定で立てた仮説」

主張 [2] のもとで，実際に起こった出来事が起こる確率を調べる

実際に起こった出来事が起こる確率はかなり小さい

そもそも，主張 [2] の仮定が正しくなかった

主張 [1] は正しいと判断してもよいと考えられる

数学Ⅰのときは表から読み取った

論法的には背理法と同様であるが，論理的矛盾ではなく，確率の大小で判断するところに違いがある

統計的な推測【仮説検定】 p.104～106

青チャートB: 例題 92～94

一般に，母集団分布に関する仮定を **仮説** といい，標本から得られた結果によって，この仮説が正しいか正しくないかを判断する方法を **仮説検定** という。また，仮説が正しくないと判断することを，仮説を **棄却する** (reject) という。コインの例では，仮説検定によって，仮説 [2] が棄却されたことになる。

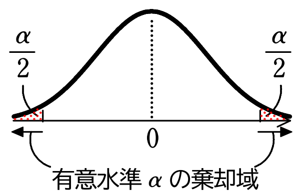
ここでは，確率 0.05 の事象を起こる可能性の低いこととして，仮説を棄却することを考えたが，仮説検定においては，どの程度小さい確率の事象が起こると仮説を棄却するかという基準を予め定めておく。この基準となる確率 α を **有意水準** または **危険率** という。有意水準 α としては，例えば 0.05 (5 %) または 0.01 (1 %) と定めることが多い。

「有意水準が５%」とは
「仮説が正しいのに誤って棄却してしまう確率が５%」ということ

有意水準を１%にした場合の違いを考えてみよう

有意水準 α に対し，立てた仮説のもとでは実現しにくい（仮説が棄却される）確率変数の値の範囲を，その範囲の確率が α になるように定める。

この範囲を有意水準 α の **棄却域** (rejection region) といい，実現した確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却する。

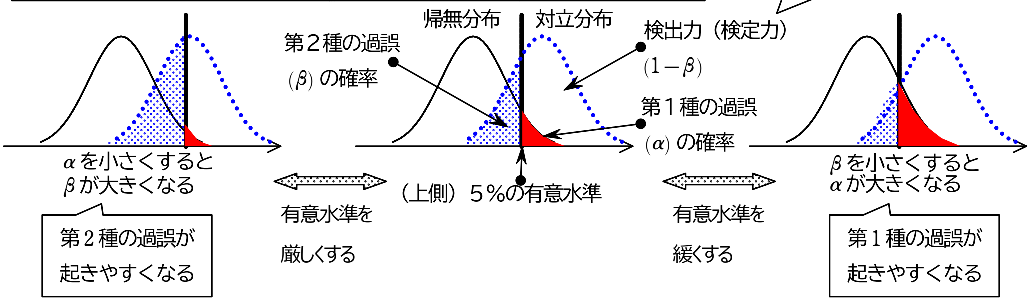


また，確率変数の値が棄却域に入らなければ，仮説を棄却するだけの根拠がこの標本からは得られなかったと考えて，「仮説を棄却できない」と判断する。なお，仮説が棄却できない場合，その仮説が正しいと判断できるわけではない。

① H_0 が真で，H_0 を棄却しない → 正しい判断
② H_0 が真で，H_0 を棄却する → 第 1 種の過誤 (α)
③ H_0 が偽で，H_0 を棄却しない → 第 2 種の過誤 (β)
④ H_0 が偽で，H_0 を棄却する → 正しい判断 $(1-\beta)$

結果＼真実	帰無仮説が正しい	対立仮説が正しい
帰無仮説を棄却しない 対立仮説が正しいとは言えない	正しい	第 2 種の過誤 (β)
帰無仮説を棄却する 対立仮説が正しい	第 1 種の過誤 (α)	正しい $(1-\beta)$

対立仮定が正しい状態で、どれだけきちんと帰無仮説を棄却できるか（αを定めた下で $1-\beta$ をできるだけ大きくする）がポイント



統計的な推測【仮説検定】 p.104～106

青チャートB: 例題 92～94

仮説検定の手順は，次のようになる。

仮説検定の手順

① ある事象が起こった状況や原因を推測し，仮説を立てる。

② 有意水準 α を定め，仮説にもとづいて棄却域を求める。

③ 標本から得られた確率変数の値が
　棄却域に入れば仮説を棄却し，
　棄却域に入らなければ仮説を棄却しない。

あとで恣意的に操作できないように有意水準は先立って決めておく。

棄却域に入らなかった場合に「帰無仮説が正しい」とはならない。これは「検出力が十分ではなかった」という可能性があるためである。

<注意> 有意水準 α で仮説検定を行うことを，「有意水準 α で **検定** する」ということがある。

例１４改） ある 1 枚のコインを 400 回投げたところ，表が 183 回出た。このコインは表と裏の出やすさに偏りがあると判断してよいかを，有意水準 5 % で検定してみよう。

解答 表が出る確率を p とする。表と裏の出やすさに偏りがあるなら，$p \fallingdotseq 0.5$ である。

ここで，「表と裏の出やすさに偏りがない」，すなわち $p=0.5$ という仮説を立てる。

この仮説が正しいとすると，400 回のうち表が出る回数 X は，

二項分布 $B(400,\ 0.5)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=400\times0.5=200,\quad \sigma=\sqrt{400\times0.5\times0.5}=10$$

n は十分に大きいと見なせるから， X は正規分布 $N(200,\ 10^2)$ で近似できる。

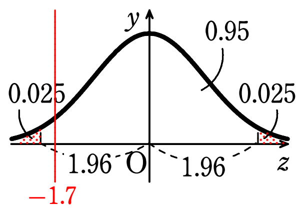
よって，$Z=\dfrac{X-200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$ であるから，

有意水準 5 % の棄却域は

$$Z\leqq -1.96 \quad \text{または} \quad 1.96\leqq Z$$

$X=183$ のとき $Z=\dfrac{183-200}{10}=-1.7$ であり，



この値は棄却域に入らないから，仮説を棄却できない。

すなわち，この結果からは，コインの表と裏の出やすさに偏りがあるとは判断できない。終