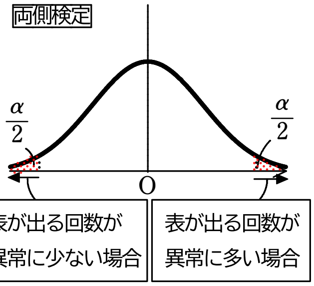
統計的な推測【片側検定・両側検定】 p.107～108

青チャートB: 例題 92～94

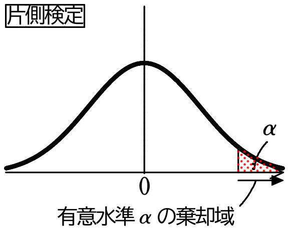
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】両側検定を行うか、片側検定を行うか、状況を判断して考えよう

前回の例１４ では，「コインは表と裏の出やすさに偏りがあると判断してよいか」という仮説に対して，表が出る回数が異常に大きくても，また，異常に小さくても，仮説が棄却されるように，棄却域を両側にとっている。このような検定を **両側検定** (two−sided test) という。



これに対し，次の例のように棄却域を片側にとる検定を **片側検定** (one−sided test) という。



例１５） ある種子の発芽率は従来 60 %であったが，発芽しやすいよう品種改良した。品種改良した種子から無作為に 150 個抽出して種をまいたところ 102 個が発芽した。品種改良によって発芽率が上がったと判断してよいか。有意水準 5 %で検定してみよう。

解答

品種改良した種子の発芽率を p とする。発芽率が上がったならば $p>0.6$ である。

ここで，$p \geqq 0.6$ を前提として「発芽率は上がっていない」，

すなわち 「 $p=0.6$ 」 という仮説を立てる。

仮説が正しいとするとき，150 個のうち発芽した種子の個数 X は二項分布 $B(150,\ 0.6)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=150\times0.6=90,\quad \sigma=\sqrt{150\times0.6\times(1-0.6)}=6$$

よって，$Z=\dfrac{X-90}{6}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

発芽率が異常に高い場合のみ考える

正規分布表から $P(0\leqq Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.45$ であるから，

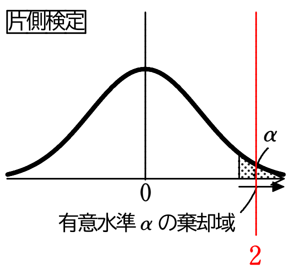
片側だけ考えるので、
$1.0-0.5=0.5$
$0.5-0.05=0.45$
となるところを考える

$p(1.64)=0.44950$
$p(1.65)=0.45053$ なので

有意水準 5 % の棄却域は

$$Z\geqq 1.64$$

$X=102$ のとき $Z=\dfrac{102-90}{6}=2$ であり，



この値は棄却域に入るから，仮説は棄却できる。

すなわち，

品種改良によって発芽率が上がったと判断してよい。

終

統計的な推測【片側検定・両側検定】 p.107～108

青チャートB: 例題 92～94

母平均の検定も，同様な考えで行うことができる。

例題１３） 300 g 入りと表示された塩の袋の山から，無作為に 100 袋を抽出して重さを調べたところ，平均値が 297.4 g であった。母標準偏差が 7.5 g であるとき，1 袋あたりの重さは表示通りでないと判断してよいか。有意水準 5 %で検定せよ。

解答 無作為抽出した 100 袋について，重さの標本平均を $\overline{X}$ とする。

ここで，仮説「母平均 m について $m=300$ である」を立てる。

標本の大きさは十分大きいと考えると，仮説が正しいとするとき，

$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(300,\ \dfrac{7.5^2}{100}\right)$ に従う。

$\dfrac{7.5^2}{100}=0.75^2$ であるから，$Z=\dfrac{\overline{X}-300}{0.75}$ は，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表から $P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$であるから，

有意水準 5 %の棄却域は　$Z\leqq -1.96,\ 1.96\leqq Z$

$\overline{X}=297.4$ のとき

$$Z=\frac{297.4-300}{0.75}=\frac{-2.6}{0.75}=-\frac{26}{10}\cdot\frac{100}{75}=-3.466\cdots\cdots\fallingdotseq -3.5$$

であり，これは棄却域に入るから，仮説は棄却できる。

すなわち，1 袋あたりの重さは表示通りでないと判断してよい。 終

補足

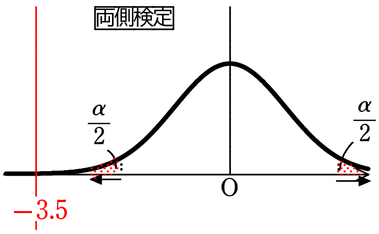
多い分には問題ないと考え，「1 袋あたりの重さは，表示通りであるか，表示より小さいか」を判断する問題と考えると片側検定の問題となる。

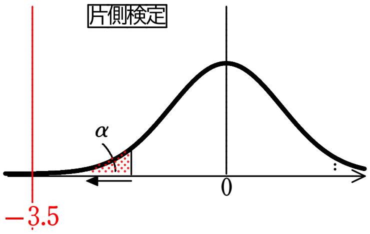
このとき，有意水準 5 %の場合の棄却域は $Z\leqq -1.64$ である。

$\overline{X}=297.4$ のとき　$Z=\dfrac{297.4-300}{0.75}\fallingdotseq -3.5$ であり，

これは棄却域に入るから帰無仮説は棄却され，

「表示より小さいと考えられる」と結論づけられる。





母標準偏差 σ も不明のときは，推定の場合と同様に，標本の大きさが十分大きければ，σ の代わりに標本標準偏差を用いて検定を行う。

統計的な推測【片側検定・両側検定】 p.107～108

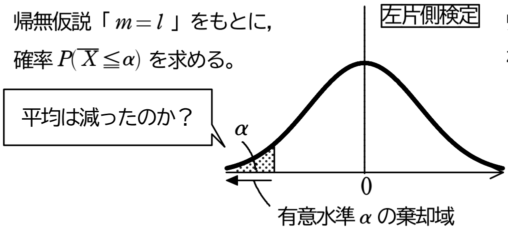
青チャートB: 例題 92～94

◎ 片側検定と両側検定を行うときはどんなとき？

例）ある母集団の平均が l で，改善した新母集団の平均を m ，標準偏差を σ とする。
この新母集団から大きさ n の標本を抽出し，標本平均 α とする。
この標本で改善されたか？有意水準５％で検定せよ。

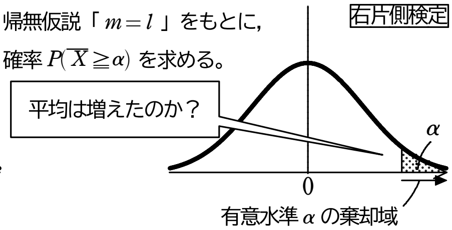
【左片側検定】… $\alpha < l$

改善した結果，新母集団の**平均は減ったか**？
帰無仮説を「 $m=l$ 」
対立仮説を「 $m<l$ 」
左片側の仮説検定を行う。
帰無仮説「 $m=l$ 」をもとに，
確率 $P(\overline{X} \leqq \alpha)$ を求める。



【右片側検定】… $\alpha > l$

改善した結果，新母集団の**平均は増えたか**？
帰無仮説を「 $m=l$ 」
対立仮説を「 $m>l$ 」
右片側の仮説検定を行う。
帰無仮説「 $m=l$ 」をもとに，
確率 $P(\overline{X} \geqq \alpha)$ を求める。



主張したい対立仮説「 $m>l$ 」に対して，
帰無仮説は「 $m \leqq l$ 」にはならないの？

・母集団から「平均が増えた」「平均が伸びた」などを判断する場合は平均が減ることを想定しません。
つまり「 $m<l$ 」は扱いません。
そのため「 $m=l$ 」として論理を進めます。
・同様に，対立仮説が「 $m<l$ 」の場合も，帰無仮説は「 $m \geqq l$ 」とはならず「 $m=l$ 」として論理を進めます。

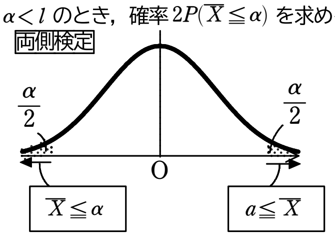
右片側検定のとき，
$P(\overline{X}=\alpha)$ ではだめなの？

・標本以上の期待される量（増えた，伸びた）を想定した確率を出すようにしています。
・また， $P(\overline{X}=\alpha)$ のような等号の確率は，連続型の確率密度関数では $P(\overline{X}=\alpha)=0$ と常に０になり判断できないのです。

例）ある製品の性質の平均の基準を l とする。平均を m ，標準偏差を σ とする母集団から大きさ n の標本を抽出し，標本平均 α とする。この母集団は，製品の基準が保たれているか？
有意水準５％で検定せよ。

【両側検定】

母集団の基準は保たれているか？
帰無仮説は基準が保たれているとする
「 $m=l$ 」
対立仮説は基準が保たれていないとする
「 $m \neq l$ 」
両側の仮説検定を行う。
帰無仮説「 $m=l$ 」をもとに，
1) $\alpha > l$ のとき，確率 $2P(\overline{X} \geqq \alpha)$ を求める。
2) $\alpha < l$ のとき，確率 $2P(\overline{X} \leqq \alpha)$ を求める。



「製品の基準が保たれているか」の仮説検定を行う場合，「基準は保たれている」の説明はできるの？

※「この製品が保たれている」とは「母平均 $m=l$ 」を意味する
・帰無仮説「基準は保たれていない $m \neq l$ 」
対立仮説「基準は保たれている $m=l$ 」
とするとき，帰無仮説のもとで論理が進められなくなり
「判断できない」となる
・帰無仮説「基準は保たれている $m=l$ 」
対立仮説「基準は保たれていない $m \neq l$ 」
とするとき，帰無仮説を棄却する場合は対立仮説を採用し
「基準は保たれていない」，
棄却できない場合は「判断できない」となる
・いずれにしても「製品の基準は保たれている」ことを判断するためには，母集団の分布を完全に把握する必要があるので説明は難しい。