三角関数【一般角・弧度法】 p.124～127

青チャートⅡ：例題 132～133

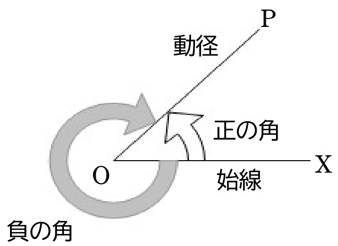
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

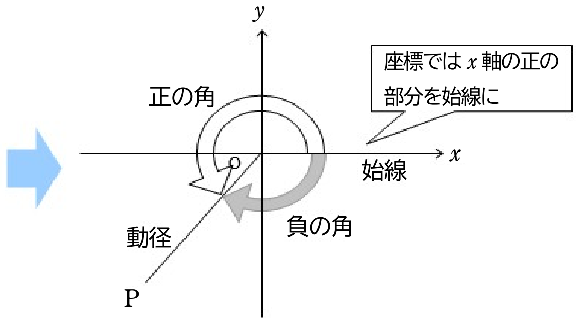
【内容目標】一般角や弧度法の考え方を知り、弧度法を使いこなせるようになろう

弧度（ラジアン）を用いて、弧の長さと面積を表現できるようになろう

□一般角

平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を **動径** (radius vector) といい，動径の最初の位置を示す半直線 OX を **始線** (initial line) という。動径の回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを **正の向き**，時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** という。

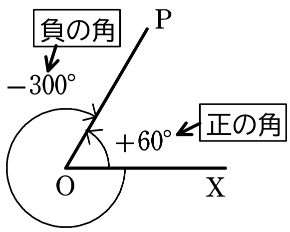




また，正の向きの回転の角を **正の角**，

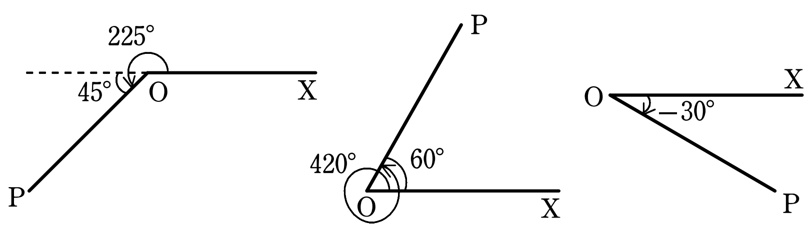
負の向きの回転の角を **負の角** という。

正の角は，例えば +60° または単に 60° と表し，負の角は，例えば −300° と表す。このように，回転の向きと大きさを表す量として拡張した角を **一般角** という。（ 0° から 360° に限らず、動径の回転量で測ったものが一般角）



一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ の動径** という。

例１） 225° の動径，420° の動径，−30° の動径の図示



終

90° や 180°の補助線を加えたり、有名角・特別な角を書き加えたりして目安の角度がわかりやすくなるようにするとよい。

三角関数【一般角・弧度法】 p.124〜127

青チャートⅡ：例題 132〜133

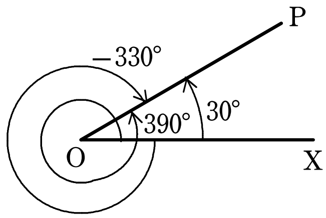
□動径の表す角

動径は 1 回転 360° 回転するともとの位置にもどるから，30° の動径 OP と，たとえば

$30^\circ+360^\circ=390^\circ$，$30^\circ+360^\circ\times2=750^\circ$，

$30^\circ+360^\circ\times(-1)=-330^\circ$

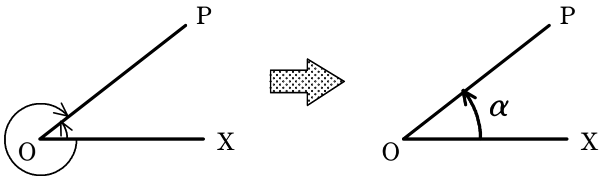
として得られる 390°，750°，−330° の動径は，すべて一致する（同じ位置にある）。これらの角を **動径 OP の表す角** という。



一般に，次のことがいえる。

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は，次のように書ける。
>
> $\alpha+360^\circ\times n$ （n は整数）

◆◇ 動径の表す角は一つとは限らない ◇◆



動径OPの表す一般角は
$\alpha+360^\circ\times n$
（n は整数）
と表される

例題） 次の角のうち，その動径が 70° の動径と同じ位置にある角はどれか。

420°，790°，1130°，−70°，−560°，−1010°

[解答]

$420^\circ=60^\circ+360^\circ\times1$

$790^\circ=70^\circ+360^\circ\times2$

$1130^\circ=50^\circ+360^\circ\times3$

$-70^\circ=290^\circ+360^\circ\times(-1)$

$-560^\circ=160^\circ+360^\circ\times(-2)$

$-1010^\circ=70^\circ+360^\circ\times(-3)$

$? = \boxed{} + 360^\circ \times \boxed{}$

ここが 70° になるものを探せばよい

360°で 1 周分なので何周するかが入る

よって，動径が 70° の動径と同じ位置にある角は　790°，−1010°

三角関数【一般角・弧度法】 p.124～127

青チャートⅡ：例題 132～133

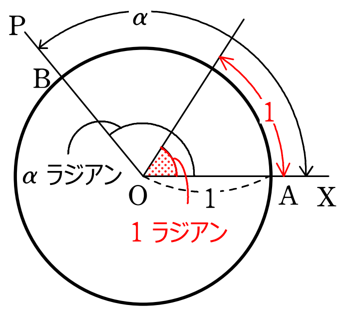
これまでは，角の大きさを表すのに，直角の $\dfrac{1}{90}$ である 1 度を単位とする**度数法**を用いてきた。ここでは，角の大きさを表す別の方法について学ぼう。

1 回転の $\dfrac{1}{360}$ を 1 度，1 度の $\dfrac{1}{60}$ を 1 分，1 分の $\dfrac{1}{60}$ を 1 秒と定めて，度・分・秒を単位とする表し方のことを度数法という

□弧度法

度数法 に対して，円における弧の長さに着目した角の測り方がある。

下の図で，点 O を中心とする半径 1 の円と半直線 OX，OP の交点を，それぞれ A，B とする。このとき，∠XOP の大きさは弧 AB の長さに比例する。



そこで，∠XOP の大きさを，弧 AB の長さ α で表すこととし，単位としては，**ラジアン** または **弧度** を用いる。半径と同じ長さの弧に対する中心角の大きさを 1 **ラジアン** または 1 **弧度** という。
半径 1 の円では，長さ 1 の弧に対する中心角の大きさが 1 ラジアンであり，長さ α の弧に対する中心角の大きさは，α ラジアンである。角の大きさのこのような表し方を **弧度法** という。

例えば，∠XOP が 180° のとき，弧 AB の長さは π であるから

$180° = \pi$ ラジアン

となる。また，1 ラジアンは，弧 AB の長さが 1 になるような角で

$$1\text{ ラジアン} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \fallingdotseq 57.3^{\circ}$$（細かくいうと　約 57°17′ 45″）

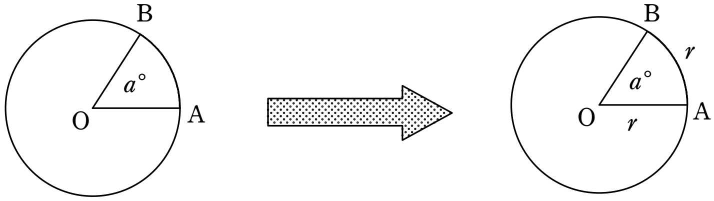
である。一般に，次のことが成り立ち，下のような換算表ができる。

$$a^{\circ} = \frac{\pi}{180}a\text{ ラジアン}, \quad \theta\text{ ラジアン} = \left(\frac{180}{\pi}\theta\right)^{\circ}$$

三角関数【一般角・弧度法】 p.124～127

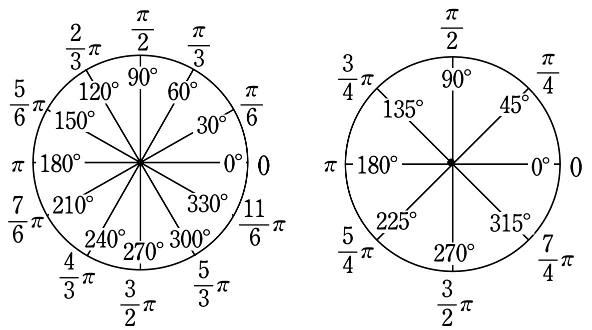
青チャートⅡ：例題 132～133

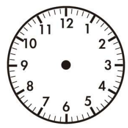
◆◇ 弧度法 ⇔ 度数法 ◇◆



弧の長さ $\overset{\frown}{AB}$ と，その弧に対する中心角の大きさ $a°$ は比例 $\overset{\frown}{AB}=2\pi\cdot OA\cdot\dfrac{a°}{360°}$ $\therefore\ \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OA}=\pi\cdot\dfrac{a°}{180°}$	$\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{OA}$ は， a の値のみで決まる （どんな大きさの円でも変わらない）	半径と弧の長さを同じにしたときの大きさを 1 ラジアンとする $\dfrac{r}{r}=1=\pi\cdot\dfrac{1(\text{ラジアン})}{180°}$ より $\boxed{180°=\pi\ (\text{ラジアン})}$ 超重要！ $\dfrac{180°}{\pi}=1$ (ラジアン)， $1°=\dfrac{\pi}{180}$ (ラジアン)

ラジアンと度の換算





注 通常、単位名のラジアンは省略される

時計は 30° 間隔
3から9までは
6等分されているから
π を6等分すると
$30°=\dfrac{\pi}{6}$ である

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

例題）次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ。

(1) $60°=180°\times\dfrac{1}{3}=\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $390°=30°\times13=\dfrac{\pi}{6}\times13=\dfrac{13}{6}\pi$

別解
$360°:2\pi=60°:x$
$360x=120\pi$
$x=\dfrac{\pi}{3}$

(3) $-615°=1°\times(-615)=\dfrac{\pi}{180}\times(-615)=-\dfrac{41}{12}\pi$

(4) $\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{4}\times180°=45°$

(5) $-\dfrac{7}{6}\pi=-\dfrac{7}{6}\times180°=-210°$

別解 $-\dfrac{7}{6}\pi=-7\times\dfrac{\pi}{6}=-7\times30°=-210°$

(6) $\dfrac{23}{3}\pi=\dfrac{23}{3}\times180°=1380°$

別解 $\dfrac{23}{3}\pi=23\times\dfrac{\pi}{3}=23\times60°=1380°$

■度数から弧度へ
特別な角（有名角）の倍数であれば
それを生かして考えると楽
特別な角（有名角）でないときは
$1°$ を $\dfrac{\pi}{180}$ に置き換える
■弧度から度数へ
特別な角（有名角）を生かしても良いが
$\pi=180°$ を代入すれば基本ＯＫ

三角関数【一般角・弧度法】 p.124～127

青チャートⅡ：例題 132～133

動径の表す角について，弧度法では次のことがいえる。

> 動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，
> 動径 OP の表す角は $\alpha+2n\pi$ である。ただし，n は整数である。

$360^\circ\times n=2n\pi$ としただけ

□弧度法と扇形

弧度法を用いて，扇形の弧の長さと面積を与える式を導いてみよう。

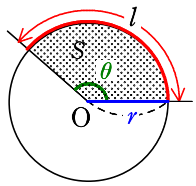
証明　扇形の弧の長さ，面積は，ともに中心角の大きさに比例する。

$l:2\pi r=\theta:2\pi$ から　$l=r\theta$

$S:\pi r^2=\theta:2\pi$ から　$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

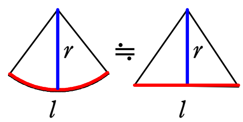
また　$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}lr$　終

x ラジアンを
線分の長さ x と
同じものとして扱う



弧度法を用いると，扇形について，次のことが成り立つ。

> **扇形の弧の長さと面積**
>
> 半径 r，中心角 θ（ラジアン）の扇形の弧の長さ l，面積 S は
>
> $l=r\theta$，　$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$　または　$S=\dfrac{1}{2}lr$



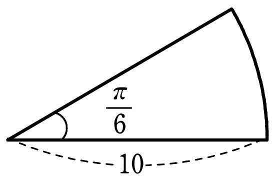
とイメージするとちょっと楽

例） 半径 10，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の弧の長さ l，面積 S は

$l=10\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{3}\pi$

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{3}\pi\cdot10=\dfrac{25}{3}\pi$

または　$S=\dfrac{1}{2}\cdot10^2\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{25}{3}\pi$



注意　半径 10，中心角 30° の扇形の弧の長さを

$l=10\times30^\circ$ としてはいけない。

弧度法（ラジアン）だから，線分の長さと同一視できることに注意しよう。