三角関数【相互関係・対称式】 p.130～131

青チャートⅡ：例題 135～138

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】相互問題を用いた問題を解けるようになろう

□三角関数の相互関係

三角関数の定義から，三角比の場合と同様に，次の公式が導かれる。

三角関数の相互関係

1 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　2 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　3 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

三角関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のいずれか 1 つの値が与えられたとき，これらの公式を用いて，他の三角関数の値を求めてみよう。

例題 1） θ の動径が第 3 象限にあり，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

【教科書通り】

解答　θ の動径が第 3 象限にあるとき，

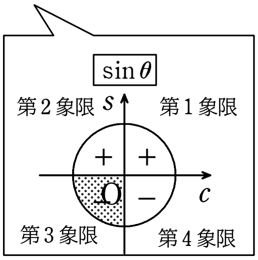
$\cos\theta<0$ である

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$

$=\dfrac{16}{25}$



$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta$

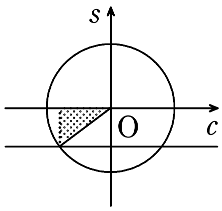
$=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)$

$=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)$

$=\dfrac{3}{4}$

【図から】

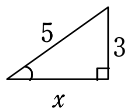
解答　$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ なので



・$\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

符号を無視すると

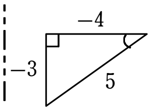
$\sin\theta=\dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$ より



三平方の定理より

$x=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

向き（符号）を考えると



$\cos\theta=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{-3}{-4}=\dfrac{3}{4}$

補足　θ の動径が第 3 象限にあるとき，θ を **第 3 象限の角** ということがある。

他の象限についても同様である。

深める　例題 1 において，θ の動径が第 3 象限以外にあるとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよう。

三角関数【相互関係・対称式】 p.130～131

青チャートⅡ：例題135～138

相互関係の公式１～３を用いて，三角関数を含む等式を証明してみよう。また，式の値を求めてみよう。

$A=B$ の証明方法
方法１　A か B の一方を変形して，他方を導く。
方法２　A と B の両方を変形して，同じ式を導く。
方法３　$A-B$　を変形して，0 になることを示す。

例題２）　等式 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

証明　(左辺) $=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

通分

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=(\text{右辺})$$

終

例題３）　$\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，次の式の値を a を用いて表せ。

対称式の問題

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

【重要】$\sin\theta\pm\cos\theta$　の形は２乗すること多し

解答　(1)　$\sin\theta+\cos\theta=a$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

よって　　$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$

ゆえに　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a^2-1}{2}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$○^3+□^3=(○+□)(○^2-○\cdot□+□^2)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

問題の条件＆ (1) の結果を代入

$$=a\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)$$

$$=\frac{a(3-a^2)}{2}$$

青チャート数学Ⅱ　例題１３８）

a を正の定数とし，θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす角とする。
2 次方程式 $2x^2-2(2a-1)x-a=0$ の 2 つの解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるとき，
a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を
α，β とすると　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

解答

与えられた 2 次方程式に対し，解と係数の関係から

$\sin\theta+\cos\theta=2a-1$ …… ①，

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{a}{2}$ …… ②

① の両辺を 2 乗して　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=(2a-1)^2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$1+2\sin\theta\cos\theta=(2a-1)^2$$

これに ② を代入して　$1+2\cdot\left(-\dfrac{a}{2}\right)=4a^2-4a+1$

よって　$4a^2-3a=0$

すなわち　$a(4a-3)=0$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{3}{4}$

このとき，与えられた 2 次方程式は

$$2x^2-x-\frac{3}{4}=0 \quad \text{すなわち} \quad 8x^2-4x-3=0$$

これを解いて　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+24}}{8}=\dfrac{2\pm2\sqrt{7}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$

また　$\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}<0<\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$　であり

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$$

①より

$$\cos\theta=2a-1-\sin\theta=\frac{3}{2}-1-\frac{1+\sqrt{7}}{4}$$

$$=\frac{2-1-\sqrt{7}}{4}=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$$