

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角関数の性質から導かれる変換を知っておこう

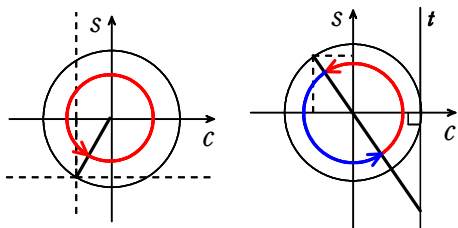
□三角関数で成り立つ等式

○ $\theta + 2n\pi$ の三角関数

n が整数のとき、角 $\theta + 2n\pi$ の動径は、角 θ の動径と一致するから、次の公式 1 が成り立つ。

$$1 \quad \begin{cases} \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \\ \tan(\theta + n\pi) = \tan \theta \end{cases} \quad \text{ただし、} n \text{ は整数}$$

$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta$ も成り立つ。



周期 ($\sin \theta$ や $\cos \theta$ なら 2π , $\tan \theta$ なら π)
の分だけ回転したら同じ動径になるということ

例 3 改) (1) $\sin \frac{25}{6}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \times 2\right) = \sin \frac{\pi}{6}$

$\frac{25}{6}\pi - \frac{12}{6}\pi = \frac{13}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi - \frac{12}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$
と 2 回引くことができる

(2) $\tan \frac{7}{3}\pi = \tan \frac{4}{3}\pi = \tan \frac{\pi}{3}$ 終

$\frac{7}{3}\pi - \frac{3}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi - \frac{3}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ と 2 回引くことができる

○ $-\theta$ の三角関数

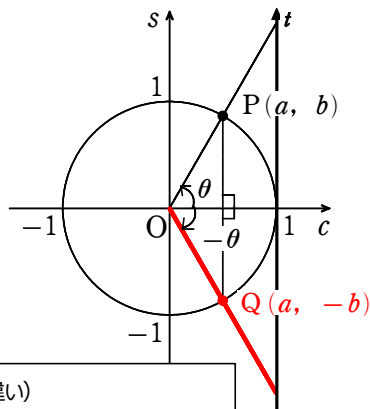
右の図のように、角 θ , $-\theta$ の動径と単位円の交点を、それぞれ P , Q とすると、2 点 P , Q の座標は

$P(\cos \theta, \sin \theta)$

$Q(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$

2 点 P , Q は x 軸に関して対称であるから、
 P の座標を (a, b) とすると、 Q の座標は $(a, -b)$ となる。

よって、次の公式 2 が成り立つ。



縦 (サイン) は逆 (符号違い)
横 (コサイン) は変わらず タンジェントは縦・傾きが逆

$$2 \quad \begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta \end{cases}$$

$-\theta$ を負角 (ふかく) という
サツ (sin) と出てくる
こする (cos) と消える

例4改) (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

サイン(sin) と出てくる

(2) $\cos\left(-\frac{13}{3}\pi\right) = \cos\frac{13}{3}\pi$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi \times 2\right)$
 $= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 終

余弦(cos) と消える

○ $\theta + \pi, \theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

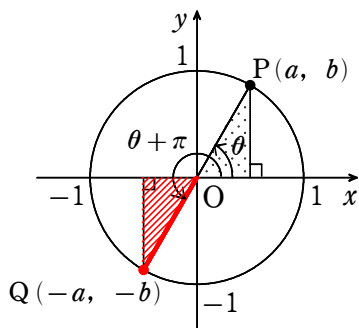
右の図のように、角 $\theta, \theta + \pi$ の動径と単位円の交点を、それぞれ P, Q とすると、2点 P, Q の座標は

$P(\cos\theta, \sin\theta)$

$Q(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$

2点 P, Q は原点に関して対称であるから、P の座標を (a, b) とすると、Q の座標は $(-a, -b)$ となる。

よって、次の公式3が成り立つ。



縦(サイン)も横(コサイン)も逆
傾き(タンジェント)はそのまま

$\theta + \pi$ の三角関数

3 $\begin{cases} \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta \end{cases} \quad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

右の図のように、角 $\theta, \theta + \frac{\pi}{2}$ の動径と単位円の交点を、それぞれ P, Q とすると、2点 P, Q の座標は

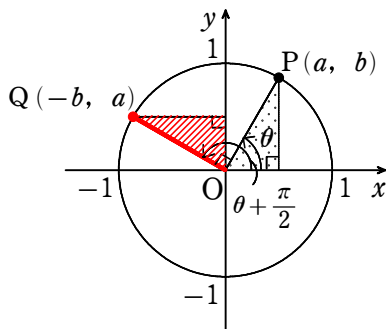
$P(\cos\theta, \sin\theta)$

$Q\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

動径 OQ は、動径 OP を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にあるから、

P の座標を (a, b) とすると、Q の座標は $(-b, a)$ となる。

よって、次の公式4が成り立つ。



横は縦に(同じ+向き)
縦は横に(異なる向きに)
傾きは90°変化
(掛けて -1 符号違いの逆数)

$\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

4 $\begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta \end{cases} \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$

問2) 次の公式 3', 4' を証明せよ。

$$3' \begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \end{cases} \quad \text{補角の公式}$$

証明

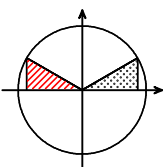
$$\begin{aligned} 3' \quad \sin(\pi - \theta) &= \sin\{\pi + (-\theta)\} \\ &= -\sin(-\theta) \\ &= -(-\sin \theta) \\ &= \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= \cos\{\pi + (-\theta)\} \\ &= -\cos(-\theta) \\ &= -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) &= \tan\{\pi + (-\theta)\} \\ &= \tan(-\theta) \\ &= -\tan \theta \end{aligned}$$

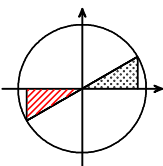
$$4' \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases} \quad \text{余角の公式}$$

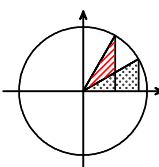
証明

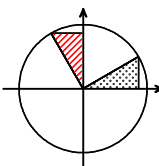
$$\begin{aligned} 4' \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\left\{\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right\} \\ &= \cos(-\theta) \\ &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right\} \\ &= -\sin(-\theta) \\ &= -(-\sin \theta) \\ &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan\left\{\frac{\pi}{2} + (-\theta)\right\} \\ &= -\frac{1}{\tan(-\theta)} \\ &= -\frac{1}{-\tan \theta} \\ &= \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

これまでに学んだ公式を用いると、どのような角に対する三角関数の値も、0 から $\frac{\pi}{2}$ までの角に
対する三角関数の値で表すことができる。

$$\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \end{cases} \quad \text{補角の公式}$$


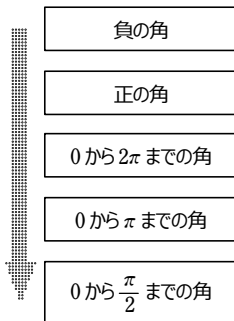
$$\begin{cases} \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \\ \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \\ \tan(\theta + \pi) = \tan \theta \end{cases}$$


$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases} \quad \text{余角の公式}$$


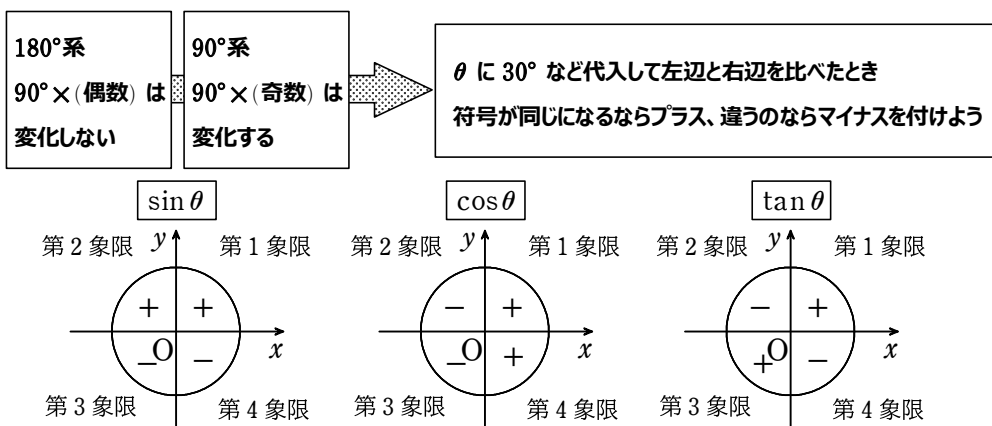
$$\begin{cases} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$


例題)

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right) &= -\sin\frac{10}{3}\pi = -\sin\left(\frac{4}{3}\pi + 2\pi\right) \\ &= -\sin\frac{4}{3}\pi = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



【別な解き方～規則性に注目して】



例題)

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right) &= -\sin\frac{10}{3}\pi = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{9}{3}\pi\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \times 6\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

第2象限の角なので
サインは正

第1象限の角なので
サインは正 ⇒ 同符号なので +

補足) 最終手段としてこの後学習する加法定理を用いることで式を整理することもできる

例) $\sin(\theta + \pi) = \sin\theta \cos\pi + \cos\theta \sin\pi$
 $= \sin\theta \cdot (-1) + \cos\theta \cdot 0 = -\sin\theta$

$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{2}$
 $= \cos\theta \cdot 0 - \sin\theta \cdot 1 = -\sin\theta$