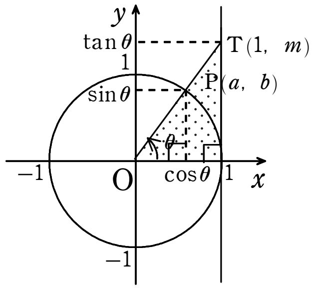
三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角関数のグラフをかけるようになろう

□ $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$, $y=\tan\theta$ **のグラフ**



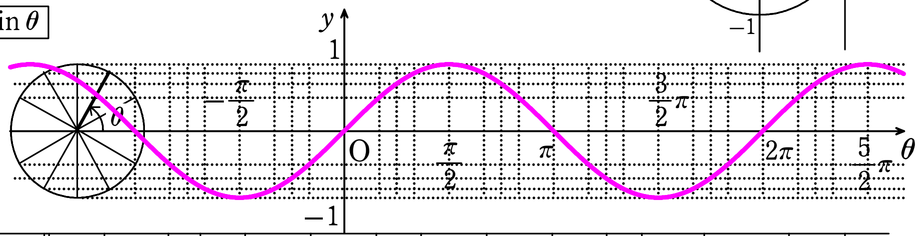
角 θ の動径と単位円との交点を P, 直線 OP と

直線 $x=1$ との交点を T とすると,

$$\mathrm{P}(a,\ b)=(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \mathrm{T}(1,\ m)=(1,\ \tan\theta)$$

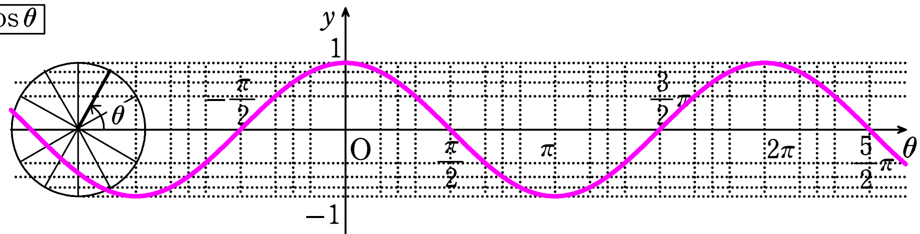
である。このことを利用して，点を打ってグラフをかいてみよう。

$y=\sin\theta$

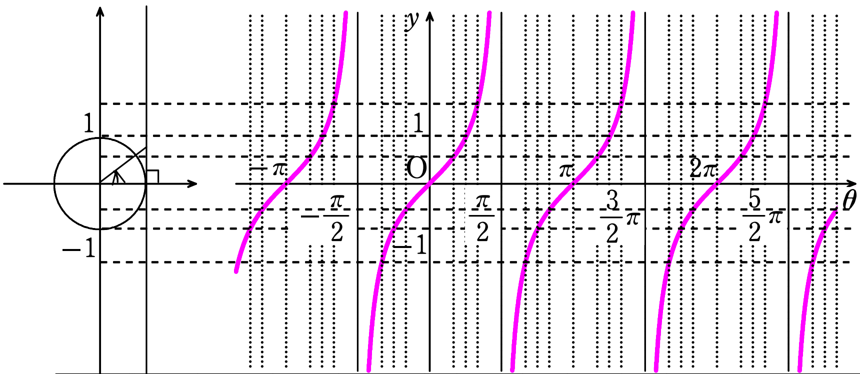


θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0

$y=\cos\theta$



θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos\theta$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1



グラフ①

tanθ

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$
$\tan\theta$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

深める グラフ上のどこの点がわかれば綺麗にグラフがかけそうか隣の人と相談しよう。

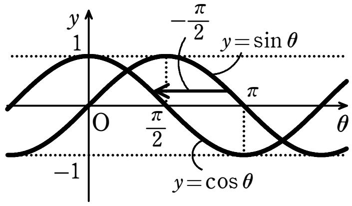
三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

○グラフの特徴

＊ θ は弧度法の角であり，θ 軸上の目盛りはラジアンでとっている。

$\cos\theta=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y=\cos\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。$y=\sin\theta$ や $y=\cos\theta$ のグラフの形をした曲線を **正弦曲線** または **サインカーブ** という。

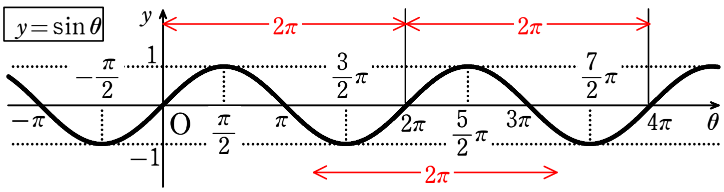


動径は 1 回転するともとの位置にもどるから，次が成り立つ。

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta\,,\quad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

この性質により，関数 $\sin\theta$，$\cos\theta$ はいずれも 2π の **周期** (period) をもつという。

グラフについていうと，関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは，いずれも 2π ごとに同じ形を繰り返す。また，等式 $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ が成り立つ。これは関数 $y=\tan\theta$ のグラフでは，π ごとに同じ形が繰り返されることを意味している。



一般に，関数 $f(x)$ において，0 でない定数 p があって，等式 $f(x+p)=f(x)$ が，x のどんな値に対しても成り立つとき，$f(x)$ は p を **周 期** とする **周期関数** であるという。

このとき，$f(x+2p)=f((x+p)+p)=f(x+p)=f(x)$となるから，$2p$ も周期である。同様に，$3p$，$-p$，$-2p$ なども $f(x)$ の周期で，周期関数の周期は無数にある。

普通，周期といえば，<u>正の周期のうち最小のもの</u>を意味する。（基本周期ということもある）

> $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ は 2π を周期とする周期関数であり，
> $y=\tan\theta$ は π を周期とする周期関数である。

$\tan\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ では定義されないが，$y=\tan\theta$ のグラフは θ が $\dfrac{\pi}{2}$に近づくにしたがって，直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく。直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ などのグラフが限りなく近づく直線を，そのグラフの **漸近線**（ぜんきんせん） という。

> 直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ （n は整数）を漸近線にもつ。

$y=\tan\theta$ のグラフは正接曲線と呼ぶ

三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

一般に，関数 $y=f(x)$ において

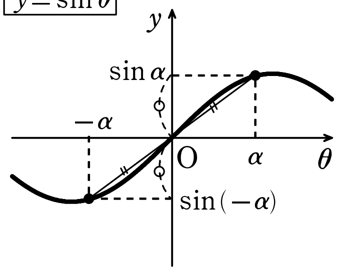
常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は 奇関数 (odd function)

常に $f(-x)=\ \ f(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ は 偶関数 (even function)

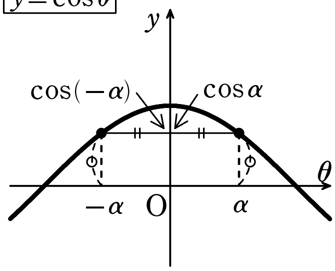
であるという。<u>奇関数のグラフは，原点に関して対称</u>であり，

<u>偶関数のグラフは，y 軸に関して対称</u>である。

$\boxed{y=\sin\theta}$



$\boxed{y=\cos\theta}$



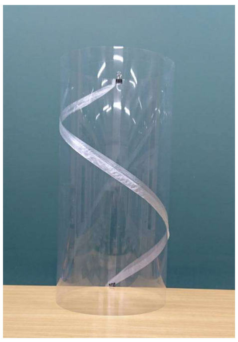
$y=\sin\ \theta$ のグラフは原点に関して対称である。

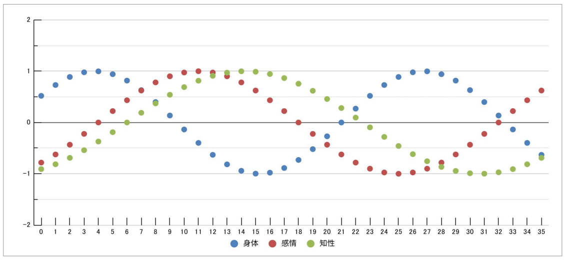
$y=\cos\ \theta$ のグラフは y 軸に関して対称である。

$y=\sin\theta$，$y=\tan\ \theta$ は奇関数，$y=\cos\ \theta$ は偶関数である。

三角関数の周期，値域，グラフの対称性についてまとめると，次のようになる。

	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
周期	2π	2π	π
値域	$-1\leqq y\leqq 1$	$-1\leqq y\leqq 1$	実数全体
グラフの対称性	原点に関して対称	y 軸に関して対称	原点に関して対称





三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

※　グラフの書き方の基本

例題） 関数 $y=\sin\theta$ のグラフをかきなさい。

① 周期を求め、目盛りの幅を計算する。ずれがあるときはそこも確認。

周期の出し方

$\sin k\theta$，$\cos k\theta \Longrightarrow \dfrac{2\pi}{k}$ を計算

$\tan k\theta \Longrightarrow \dfrac{\pi}{k}$ を計算

目盛りの幅の出し方

$\sin k\theta$，$\cos k\theta \Longrightarrow \dfrac{\text{周期}}{4}$ を計算

$\tan k\theta \Longrightarrow \dfrac{\text{周期}}{2}$ を計算

ずれの出し方

$\sin(\theta-p)$，

$\cos(\theta-p)$，

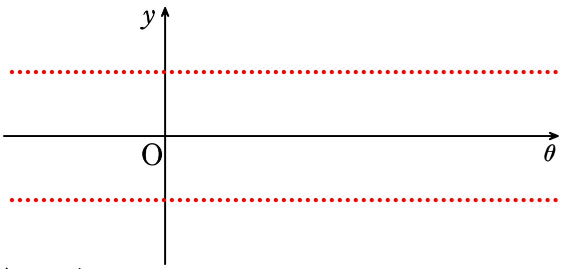
$\tan(\theta-p)$

$\Longrightarrow p$ だけずれる

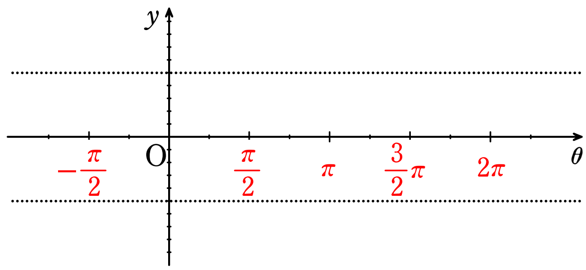
ずれる場合、慣れるまでは
実際に目盛りを書き並べておくと便利

この場合は $y=\sin\theta$ なので、周期は $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$，目盛りの幅は $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，グラフのずれは無し

② 軸とグラフの上下の幅を決める

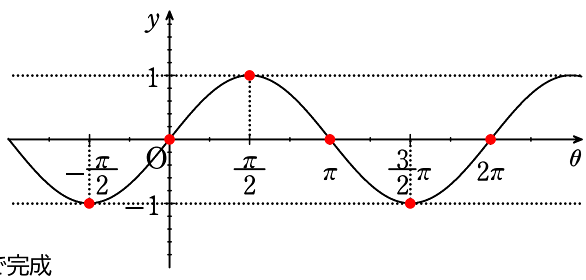


③ x 軸に①で調べた目盛りの幅で書き込んでいく



④ 目盛りの幅に合わせてグラフの頂点と交点（$\tan\theta$ のときは交点、漸近線）の順番に印をつけてグラフをかく。$y=a\sin\theta$ の a の値をもとに y 軸にも目盛りを打つ。

（山か，軸上か，谷かは実際に２，３点について値を代入して、あとは周期性で点を打っていく。）



これで完成

三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

例６） 関数 $y=2\sin\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

例６

$\boxed{解答}$ 周期は $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$　　目盛りの幅は $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

スタート

よって　$-\dfrac{2}{2}\pi \to -\dfrac{1}{2}\pi \to 0 \to \dfrac{1}{2}\pi \to \dfrac{2}{2}\pi \to \dfrac{3}{2}\pi \to \dfrac{4}{2}\pi \to \dfrac{5}{2}\pi \to$

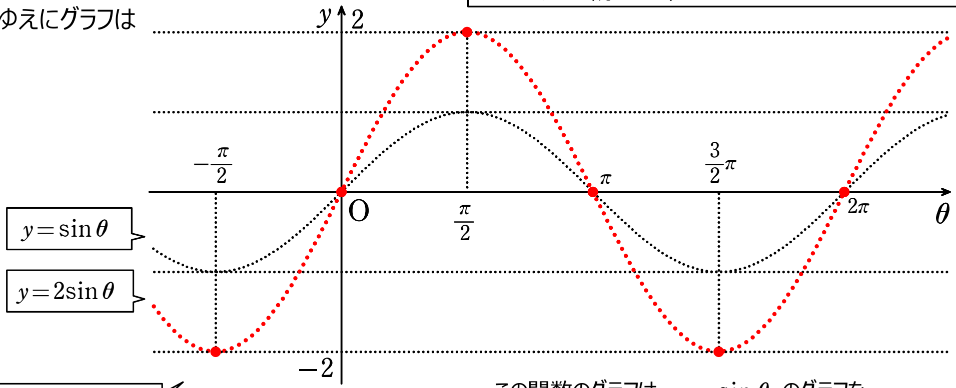
＋幅

$\theta=0$ のとき　$y=2\sin 0=0$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y=2\sin\dfrac{\pi}{2}=2$

この辺の計算はあくまでも確認の作業なので
教科書などでは省略されている
（慣れてきたら頭の中で処理しても良いが、間違えたり迷うならちゃんと調べよう）

ゆえにグラフは



なぞっておこう

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，
θ 軸をもとにして y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。
また，この関数は 2π を周期とする周期関数である。

例７） 関数 $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

$\boxed{解答}$ 周期は $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{6}$　ずれは $-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{6}$

スタート

よって　$-\dfrac{2}{2}\pi \to -\dfrac{1}{2}\pi \to 0 \to \dfrac{1}{2}\pi \to \dfrac{2}{2}\pi \to \dfrac{3}{2}\pi \to \dfrac{4}{2}\pi \to \dfrac{5}{2}\pi \to$ をずらすと

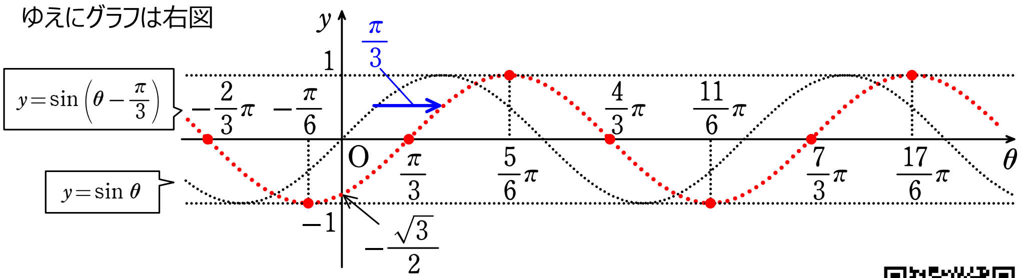
ずれて

$-\dfrac{4}{6}\pi \to -\dfrac{\pi}{6} \to \dfrac{2\pi}{6} \to \dfrac{5}{6}\pi \to \dfrac{8}{6}\pi \to \dfrac{11}{6}\pi \to \dfrac{14}{6}\pi \to$

＋幅

$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$y=\sin 0=0$　　　$\theta=0$ のとき　$y=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（y 切片）

ゆえにグラフは右図



この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。

また，この関数は 2π を周期とする周期関数である。

例７

三角関数【三角関数のグラフ】 p.135〜140

青チャートⅡ：例題140〜141

例８） 関数 $y=\sin 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

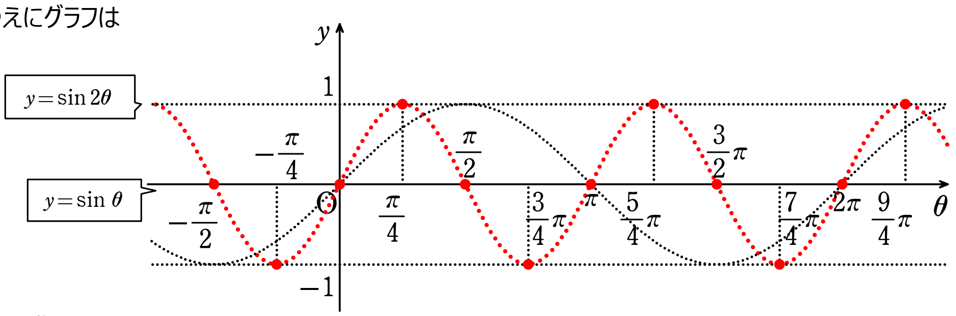
例８

解答　周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{\pi}{4}$

よって　$-\dfrac{2\pi}{4}\to-\dfrac{\pi}{4}\to 0\to\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{2\pi}{4}\to\dfrac{3\pi}{4}\to\dfrac{4\pi}{4}\to\dfrac{5\pi}{4}\to$

$\theta=0$のとき　$y=\sin 0=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき　$y=\sin\dfrac{2}{4}\pi=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

ゆえにグラフは



$\theta=\dfrac{\alpha}{2}$ のときの $\sin 2\theta$ の値と $\theta=\alpha$ のときの $\sin\theta$ の値は一致する。

よって，$y=\sin 2\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸をもとにして θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

また，この関数は，$y=\sin\theta$ の周期 2π の $\dfrac{1}{2}$ 倍，すなわち π を周期とする周期関数である。

例題４） 関数 $y=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

例題４

解答　$y=\sin 2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから

周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{12}\pi$　ずれは $\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{12}\pi$

スタート

よって　$-\dfrac{2}{2}\pi\to-\dfrac{1}{2}\pi\to 0\to\dfrac{1}{2}\pi\to\dfrac{2}{2}\pi\to\dfrac{3}{2}\pi\to\dfrac{4}{2}\pi\to\dfrac{5}{2}\pi\to$　をずらすと

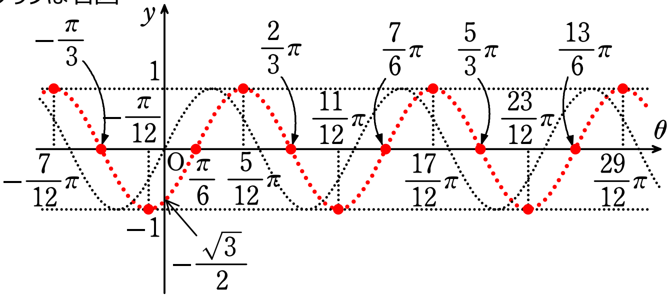
ずれて

$-\dfrac{4}{12}\pi\to-\dfrac{\pi}{12}\to\dfrac{2}{12}\pi\to\dfrac{5}{12}\pi\to\dfrac{8}{12}\pi\to\dfrac{11}{12}\pi\to\dfrac{14}{12}\pi\to$

＋幅

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$のとき　$y=\sin 0=0$　　$\theta=0$ のとき　$y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　（y 切片）

ゆえにグラフは右図



一般化

$y=\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin 2\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもので，

この関数は π を周期とする周期関数である。

三角関数【三角関数のグラフ】 p.135〜140

青チャートⅡ：例題 140〜141

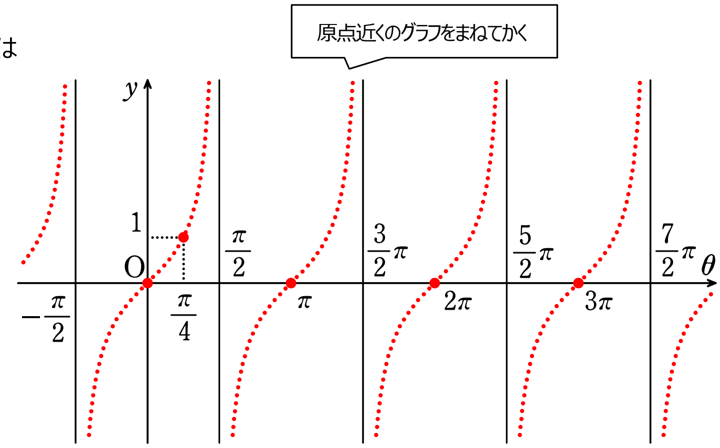
例） 関数 $y=\tan\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

解答　周期は $\dfrac{\pi}{1}=\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$　幅の半分は$\dfrac{\pi}{4}$

よって　$-\dfrac{2\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}\to0\to\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{2\pi}{2}\to\dfrac{3\pi}{2}\to\dfrac{4\pi}{2}\to\dfrac{5\pi}{2}\to$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき　$y=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

ゆえにグラフは



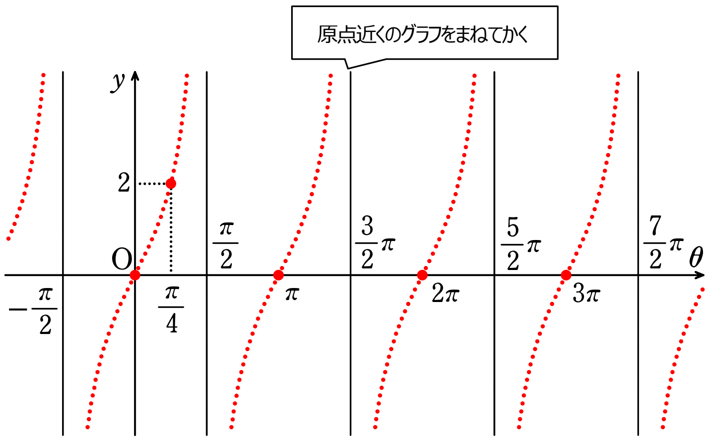
例） 関数 $y=2\tan\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

解答　周期は $\dfrac{\pi}{1}=\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$　幅の半分は$\dfrac{\pi}{4}$

よって　$-\dfrac{2\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}\to0\to\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{2\pi}{2}\to\dfrac{3\pi}{2}\to\dfrac{4\pi}{2}\to\dfrac{5\pi}{2}\to$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき　$y=2\times\tan\dfrac{\pi}{4}=2\times1=2$

ゆえにグラフは



例） 関数 $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

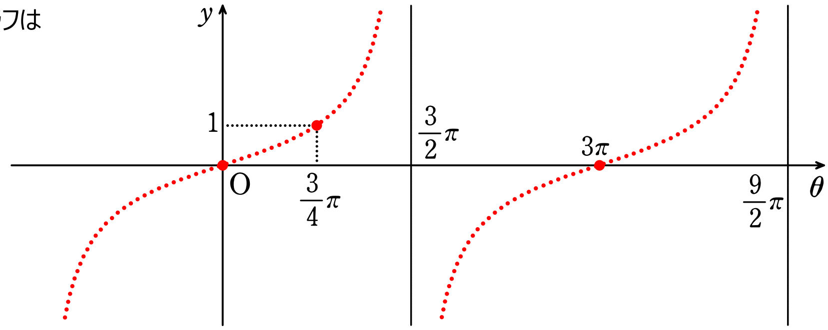
解答　周期は $\dfrac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{3\pi}{2}$　幅の半分は$\dfrac{3\pi}{4}$

よって　$-\dfrac{6\pi}{2}\to-\dfrac{3\pi}{2}\to0\to\dfrac{3\pi}{2}\to\dfrac{6\pi}{2}\to\dfrac{9\pi}{2}\to\dfrac{12\pi}{2}\to$

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$のとき　$y=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

原点近くのグラフをまねてかく

ゆえにグラフは



例） 関数 $y=\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

解答　周期は $\dfrac{\pi}{1}=\pi$　目盛りの幅は $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{6}\pi$　幅の半分は$\dfrac{\pi}{4}$　ずれは$-\dfrac{\pi}{6}$

スタート

よって　$-\dfrac{2\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}\to0\to\dfrac{\pi}{2}\to\dfrac{2\pi}{2}\to\dfrac{3\pi}{2}\to\dfrac{4\pi}{2}\to\dfrac{5\pi}{2}\to$

ずれて

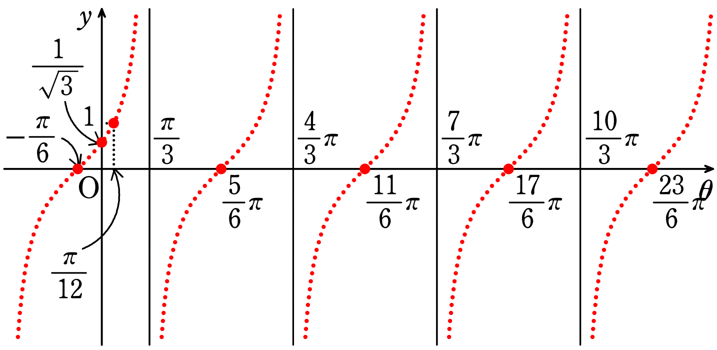
ずらして　$-\dfrac{7\pi}{6}\to-\dfrac{4\pi}{6}\to-\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{2\pi}{6}\to\dfrac{5\pi}{6}\to\dfrac{8\pi}{6}\to\dfrac{11\pi}{6}\to\dfrac{14\pi}{6}\to$

＋幅

周期の半分もずらすと $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{12}\pi-\dfrac{2}{12}\pi=\dfrac{\pi}{12}$なので

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

ゆえにグラフは



三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

○グラフの読み取り

参考　まずは問題の式をよく見よう

$y=a\sin(k\theta-p)$ の形であれば $y=a\sin k\left(\theta-\dfrac{p}{k}\right)$ に

$(CG\text{の間隔})=(\text{周期の半分})=\dfrac{2\pi}{k}\times\dfrac{1}{2}$

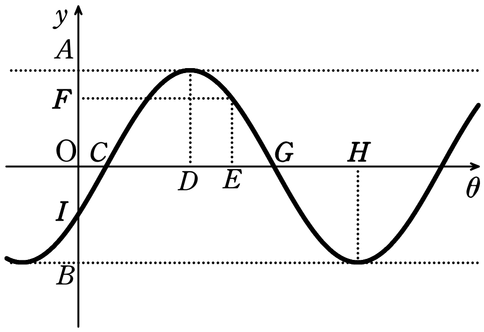
CG の間隔を 2 で割れば頂点交点の間隔がわかる

DH の間隔でも可能

F の値は与式に $\theta=E$ を代入する

I の値は与式に $\theta=0$ を代入する

※ 与式中に未知数があるときは最後に

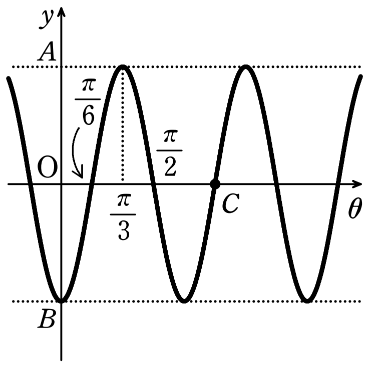


4STEP数学Ⅱ　問題２７２）

右の図は，関数 $y=2\sin(a\theta-b)$ のグラフである。

$a>0$，$0<b<2\pi$ のとき，a，b および図中の目盛り

A，B，C の値を求めよ。



解答　$y=2\sin(a\theta-b)$ を変形すると

$$y=2\sin a\left(\theta-\frac{b}{a}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

図から，周期は　$\dfrac{\pi}{3}\times2=\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$2\pi\div a=\dfrac{2}{3}\pi$　　ゆえに　　$a=3$

このとき，① は　$y=2\sin3\left(\theta-\dfrac{b}{3}\right)$

よって，図のグラフは，$y=2\sin3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{b}{3}$ だけ平行移動したものである。

ここで，$0<b<2\pi$ から　$0<\dfrac{b}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$

したがって　$\dfrac{b}{3}=\dfrac{\pi}{6}$　　ゆえに　　$b=\dfrac{\pi}{2}$

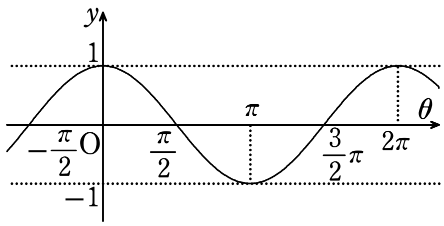
また　$A=2$，$B=-2$，$C=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$

三角関数【三角関数のグラフ】 p.135～140

青チャートⅡ：例題 140～141

問題６）

下の三角関数 ① ～ ⑧ のうち，グラフが右の図のようになるものをすべて選べ。



① $\sin\theta$　　② $\sin\theta+\frac{\pi}{2}$

③ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$　　④ $\sin(2\theta+\pi)$

⑤ $\cos\theta$　　⑥ $\cos(-\theta)$

⑦ $-\cos\theta+\frac{\pi}{2}$　　⑧ $-\cos(2\theta+\pi)$

解答　⑤ の関数のグラフ $y=\cos\theta$ は，与えられた図のようになる。

また　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$

であるから，③，⑥ は ⑤ と同じ関数である。

以上から　③，⑤，⑥

ヒント　点の代入で候補を絞り込むこともできる。

ただし，確実に変形できるかは確認が必要。

（ $y=\cos 3\theta$ なども下の 2 点を代入しても同じ値になるがグラフの形は異なる）

	$\theta=0$	$\theta=\frac{\pi}{2}$	
① $\sin\theta$	0	1	
② $\sin\theta+\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$1+\frac{\pi}{2}$	
③ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	○
④ $\sin(2\theta+\pi)$	0	0	

	$\theta=0$	$\theta=\frac{\pi}{2}$	
⑤ $\cos\theta$	1	0	○
⑥ $\cos(-\theta)$	1	0	○
⑦ $-\cos\theta+\frac{\pi}{2}$	$-1+\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	
⑧ $-\cos(2\theta+\pi)$	1	-1	