三角関数【方程式・不等式】 p.141～143

青チャートⅡ：例題 142～145

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】方程式・不等式を図から解けるようになろう

□三角関数を含む方程式

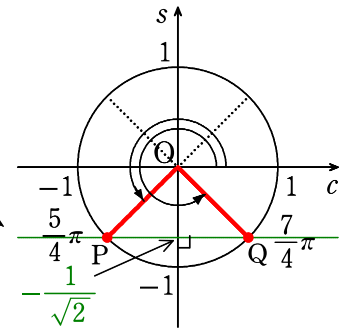
$\cos\theta=$○ のときは横が○の線、
つまり縦線を引くことになる

例９） $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{2}\sin\theta+1=0$ を解く。

方程式を変形すると

$$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad（高さが -\frac{1}{\sqrt{2}} の線）$$

直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ （横線）を引いて交点を考える



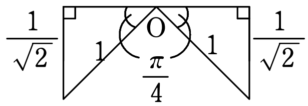
二等辺三角形なので $45°=\dfrac{\pi}{4}$ を用いる

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

終

表を覚えていたら表からでも良い



θ の範囲に制限がないとき，$\sin\theta$ は周期 2π の周期関数であるから，解は次のようになる。

$$\theta=\frac{5}{4}\pi+2n\pi,\ \frac{7}{4}\pi+2n\pi\quad（n は整数）$$

範囲がないときや一般解を求めよと言われたら
$\sin\theta$ や $\cos\theta$ のときは $+2n\pi$ を付けよう
（$\sin\theta$ や $\cos\theta$ のグラフの周期から）

問３） $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\tan\theta=\sqrt{3}$ を解く。

右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$（t 軸） をとり，

t 軸上に $\sqrt{3}$ となる点をとり

原点を通るように線を引く

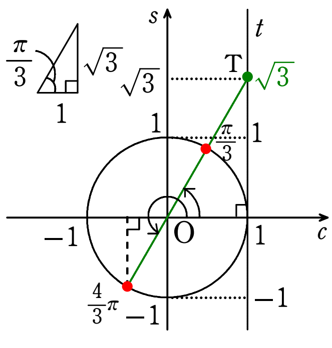
交点にできる三角形は縦長（横短い）三角形なので

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$

終

表を覚えていたら表からでも良い



θ の範囲に制限がないとき，解は次のようになる。

$$\theta=\frac{\pi}{3}+n\pi\quad（n は整数）$$

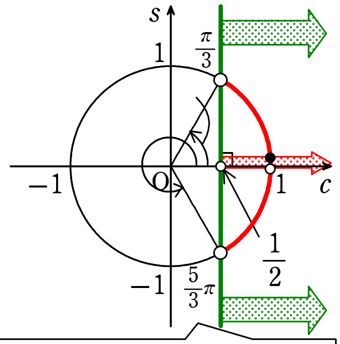
範囲がないときや一般解を求めよと言われたら
$\tan\theta$ のときは $+n\pi$ をつけよう
（$\tan\theta$ のグラフの周期から）
図からわかるようにひとつにまとめることができる

三角関数【方程式・不等式】 p.141～143

青チャートⅡ：例題 142～145

□三角関数を含む不等式

例題５） $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta > \dfrac{1}{2}$ を解け。



解答　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

を満たす θ の値は　$\theta = \dfrac{\pi}{3}, \ \dfrac{5}{3}\pi$　まずは方程式を解く

よって，右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$$

範囲のスタートの $\theta = 0$ から、ゴールの $\theta = 2\pi$ までで満たすところをみる

補足　$\cos\theta$ の値は θ の動径と単位円の交点の x 座標に等しいから，

その x 座標が $\dfrac{1}{2}$ より小さくなる θ の値の範囲を求めている。

別解　例題５は，$y = \cos\theta$ のグラフを用いて解くこともできる。

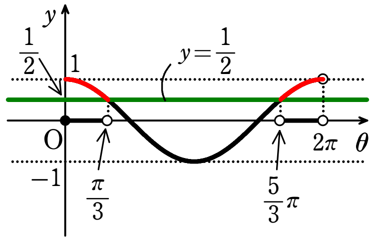
求める θ の値の範囲は，関数

$y = \cos\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

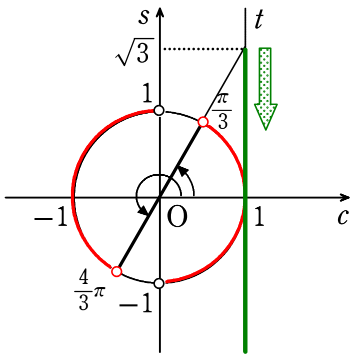
のグラフが，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ より上側に

あるような θ の値の範囲であるから

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}, \quad \dfrac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$



問４） $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta < \sqrt{3}$ を解け。



解答　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = \sqrt{3}$ となる θ は

$\theta = \dfrac{\pi}{3}, \ \dfrac{4}{3}\pi$　まずは方程式を解く

よって，不等式の解は，右の図から

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

補足　$\tan\theta$ の値は θ の動径を延長した直線と直線 $x = 1$ との交点の y 座標に等しいから，

その y 座標が 1 より大きくなる θ の値の範囲を求めている。 $\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}$，$\theta \fallingdotseq \dfrac{3}{2}\pi$ であることに注意する。

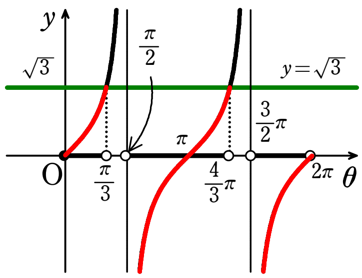
別解　求める θ の値の範囲は，

関数 $y = \tan\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ のグラフが，

直線 $y = \sqrt{3}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，図から

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}, \quad \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{4}{3}\pi, \quad \dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$



三角関数【方程式・不等式】 p.141～143

青チャートⅡ：例題 142～145

応用例題１）

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解け。

考え方 … $\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと $\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。$\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ の値の範囲に注意する。

置き換えてもよい

解答　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

範囲が変わるので範囲の吟味をする

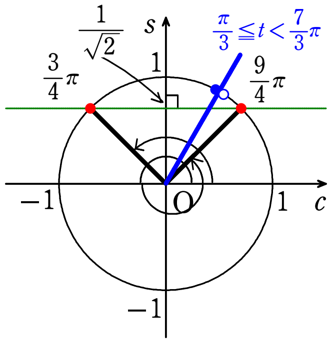
$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

であるから，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

より　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi$

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$\theta=\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$



問５）

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

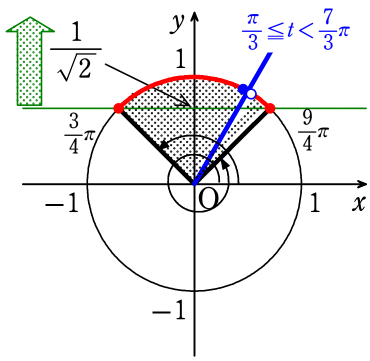
解答

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$

この範囲で，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ の

値は　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi$

方程式部分は応用例題１と同じ

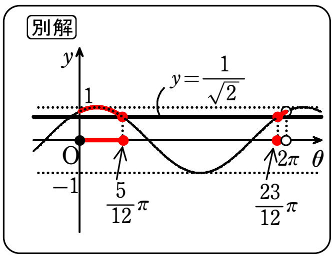


よって，図から，不等式を満たす $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{3}{4}\pi,\quad \frac{9}{4}\pi \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$$

$$\frac{4}{12}\pi \leqq \theta+\frac{4}{12}\pi \leqq \frac{9}{12}\pi,\quad \frac{27}{12}\pi \leqq \theta+\frac{4}{12}\pi < \frac{28}{12}\pi$$

ゆえに　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi \leqq \theta < 2\pi$



三角関数【方程式・不等式】 p.141～143

青チャートⅡ：例題142～145

例題） $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta + 5\cos\theta + 1 = 0$

相互関係の式　**三角関数は統一**

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

解答

$2(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta + 1 = 0$ より

$2\cos^2\theta - 5\cos\theta - 3 = 0$

まずは方程式を解く

よって　$(\cos\theta - 3)(2\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore\quad \cos\theta = -\dfrac{1}{2},\ 3$

教科書などではとり得る値の範囲から $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の吟味を行っているが、図をかくと明かである。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より

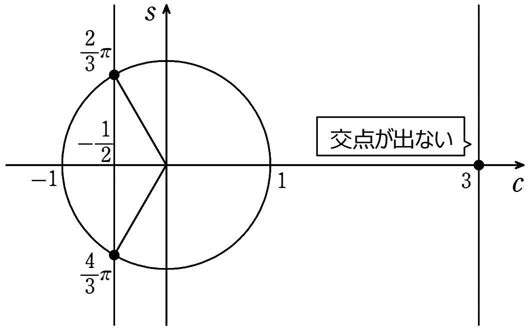
$\cos\theta - 3 \neq 0$ であるから

$2\cos\theta + 1 = 0$

すなわち　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと

$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$



(2) $2\cos^2\theta \geqq 3\sin\theta$

相互関係の式　**三角関数は統一**

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

解答

$2(1-\sin^2\theta) \geqq 3\sin\theta$ より

$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 \leqq 0$

まずは不等式を解く

よって　$(\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) \leqq 0$

$\therefore\quad -2 \leqq \sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

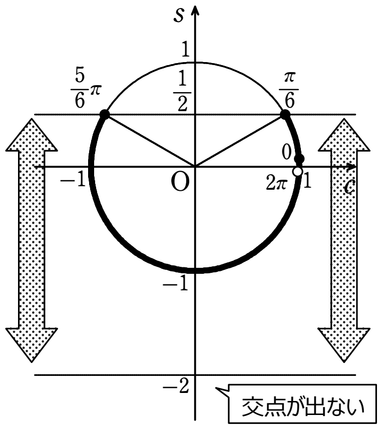
$\sin\theta + 2 > 0$ であるから

$2\sin\theta - 1 \leqq 0$

すなわち　$\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$



交点が出ない

教科書などではとり得る値の範囲から $\sin\theta$ や $\cos\theta$ の吟味を行っているが、図をかくと明かである。

範囲のスタートの $\theta = 0$ から、ゴールの $\theta = 2\pi$ までで満たすところをみる