三角関数【倍角・半角の公式】 p.152〜156

青チャートⅡ：例題154〜159

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】２倍角、３倍角の公式を導きだし，使いこなそう

□２倍角・半角の公式の応用

まずは加法定理をおさらいしましょう

複号±や∓を使うときは
同順（同じ順で読む）か
任意（自由な順に読む）かを記載しよう。

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$　（複号同順）

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$　（複号同順）

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$　（複号同順）

$\alpha+\beta$ の加法定理について，$\beta=\alpha$ とすると

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を用いると

$$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$
$$=2\cos^2\alpha-1$$

サインとコサインは符号違い

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を用いると

$$=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\tan2\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$
$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いると

$$\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$
$$=\frac{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

三角関数【倍角・半角の公式】 p.152～156

青チャートⅡ：例題154～159

$\alpha+\beta$ の加法定理について，$\beta=2\alpha$ とすると

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+2\alpha)=\sin 3\alpha &= \sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha \\
&=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+\cos\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha \\
&=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) \\
&=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha-2\sin^3\alpha \\
&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha
\end{aligned}
$$

サインとコサインは符号違い

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+2\alpha)=\cos 3\alpha &= \cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha \\
&=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-\sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha \\
&=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha
\end{aligned}
$$

余弦（コサイン）の２倍角の公式について，$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とすると

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ より

$$\cos 2\cdot\frac{\theta}{2}=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta$$

$$\therefore\ \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ より

サインとコサインは
コサインのみの符号違い

$$\cos 2\cdot\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$$

$$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いると

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

※積和公式、和積公式も加法定理から導ける（主に数Ⅲで用いますが，後ほど扱います）

三角関数【倍角・半角の公式】 p.152～156

青チャートⅡ：例題 154～159

【使うもの】２倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

数学Ⅲの 積分などでは

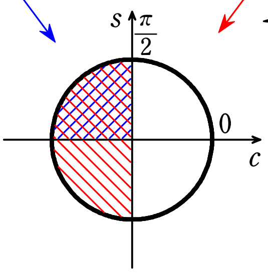
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

□２倍角・半角の公式の応用

例題８） $\boxed{\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi}$ で，$\boxed{\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}}$ のとき，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ。



$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ なので 第２象限

$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ より

$\cos\alpha < 0$ なので左半分（第２象限と第３象限）

条件より第２象限なので $\underline{\sin\alpha > 0}$ であることがわかる

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ であるから　$\sin\alpha > 0$

上で調べた符号を付ける

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{25}-\frac{16}{25}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

サインを求めるときは

$\sqrt{1-\cos^2\theta}$

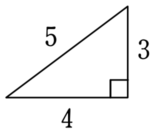
コサインを求めるときは

$\sqrt{1-\sin^2\theta}$ に代入

●図形を用いて考えると

$\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ より

下のような直角三角形になる



$\sin\alpha > 0$ なので

$\sin\alpha = +\dfrac{3}{5}$

よって　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

２倍角の公式を用いて

$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

㊎

三角関数【倍角・半角の公式】 p.152～156

青チャートⅡ：例題154～159

例１２） 半角の公式を用いて，$\sin\frac{\pi}{8}$ の値を求める。

$\frac{\pi}{8}=\frac{180^\circ}{8}=22.5^\circ=\frac{45^\circ}{2}$ なので半角の公式を使う

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\sin^2\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(1-\cos 45^\circ)$$

２乗を忘れない

半角の公式

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$\alpha=45^\circ=\frac{\pi}{4}$ を代入すれば良い

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

深める
$\sin 15^\circ$ なども半角の公式で求めることができるが，加法定理と比べてどちらがよいか周りと相談しよう

$\sin\frac{\pi}{8}>0$ であるから

２重根号

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$ 終

練習３４） 半角の公式を用いて，$\cos\frac{\pi}{8}$，$\tan\frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

また

$$\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)^2$$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$ であるから　$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

別解

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{4-2}}$$
$$=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

□三角関数を含む方程式，不等式

2倍角の公式などを利用して，三角関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。

ポイントは $\boxed{\text{三角関数の統一}}$

① 正弦、余弦が混ざっていたらどちらかに統一

② 1倍角や2倍角、半角などが混ざっていたら統一

応用例題3）

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\cos 2x = -3\cos x + 1$　　(2) $\cos 2x < -3\cos x + 1$

三角関数は統一

・正弦･余弦の統一

・倍角の統一

解答 (1) 2倍角の公式を用いて，左辺を変形すると

$$2\cos^2 x - 1 = -3\cos x + 1$$

移項して整理すると

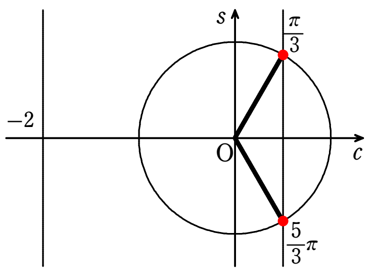
$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

左辺を変形して $(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x \fallingdotseq -2$ であるから

$$2\cos x - 1 = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$



(2) (1)により，与えられた不等式は，次のように変形される。

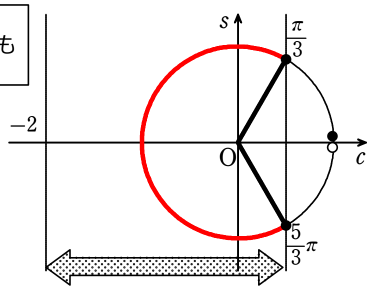
$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$$

$-2 < \cos\theta < \dfrac{1}{2}$ だけども

$\cos x + 2 > 0$ であるから

$$2\cos x - 1 < 0 \qquad \text{すなわち} \qquad \cos x < \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5}{3}\pi$



三角関数【倍角・半角の公式】 p.152～156

青チャートⅡ：例題154～159

発展　和と積の公式

加法定理において，2 式の両辺の和，差をとってみよう

$$\begin{array}{rrl} & \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ +) & \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} & \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ -) & \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} & \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ +) & \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} & \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ -) & \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \multicolumn{3}{l}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta} \end{array}$$

よって，正弦と余弦の積を，和や差に変形する次の公式が得られる。

積和公式

1　$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2　$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3　$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4　$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

例１）　$\sin 3\theta\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}\{\sin(3\theta+2\theta)+\sin(3\theta-2\theta)\}$

$$= \frac{1}{2}(\sin 5\theta + \sin\theta)$$　終

また，公式１～４において，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと

$$\alpha = \frac{A+B}{2},\quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

となるから，正弦，余弦の和や差を，積に変形する次の公式が得られる。

和積公式

5　$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

6　$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

7　$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

8　$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

例２）　$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$$= 2\sin 45^\circ\cos 30^\circ = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$　終

三角関数【倍角・半角の公式】 p.152〜156

青チャートⅡ：例題154〜159

例３） $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 3x + \sin x = 0$ を解く。

ポイントは

三角関数の統一

① 正弦、余弦が混ざっていたらどちらかに統一
② １倍角や２倍角、半角などが混ざっていたら統一

何を使ったら統一できるか考えよう

解答 **【和積の公式の活用】**

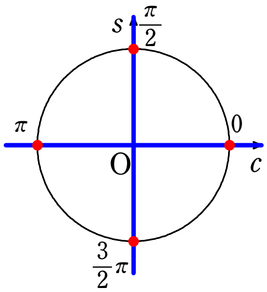
方程式を変形すると $2\sin\dfrac{3x+x}{2}\cos\dfrac{3x-x}{2}=0$

すなわち $2\sin 2x\cos x=0$

よって $4\sin x\cos^2 x=0$

ゆえに $\sin x=0$ または $\cos x=0$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから $x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ 終



別解 **【３倍角の公式の活用】**

３倍角の公式を用いて $3\sin x-4\sin^3 x+\sin x=0$

$4\sin^3 x+4\sin x=0$

$\sin x(\sin^2 x-1)=0$

$\sin x(\sin x-1)(\sin x+1)=0$

ゆえに $\sin x=-1,\ 0,\ 1$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから $x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ 終