三角関数【三角関数の合成】 p.157～159

青チャートⅡ：例題160～165

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】合成を用いた計算の仕方を身につけよう

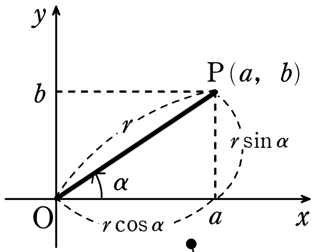
□加法定理のおさらい

○次の式を、加法定理を用いて展開せよ。

$\sin(\theta+30^\circ)=\quad \sin\theta\cos30^\circ+\cos\theta\sin30^\circ$

□三角関数の合成

加法定理を用いて，$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を変形して $2\sin(\theta+30^\circ)$ のような 1 つの三角関数に変形することを考えよう。



座標が $(a,\ b)$ である点を P とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とする。

また，線分 OP の長さを r とすると

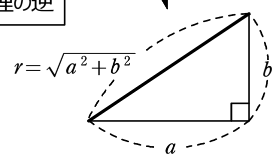
$a=r\cos\alpha$， $b=r\sin\alpha$

よって　$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta$　r でくくる

$=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$　加法定理の逆

$=r\sin(\theta+\alpha)$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ である。



$a\sin\theta+b\cos\theta$ のこのような変形を **三角関数の合成** という。

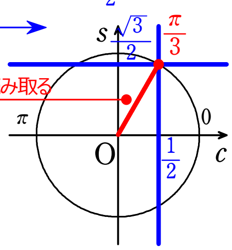
> **三角関数の合成**
>
> $$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$
>
> ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

例１３） $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の変形

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ から　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1\cdot\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}+\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる線を引く



$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$　交点の角度を読み取る

加法定理の逆　　正弦は同符号

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

終

□三角関数の合成の別な形

例１３）　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の変形

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ から　$\boxed{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1\cdot\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=2\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ となる線を引く

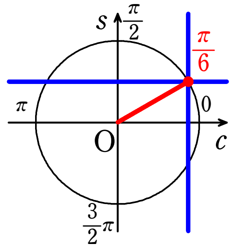
交点の角度を読み取る

加法定理の逆

$$=2\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

余弦は異符号



終

□三角関数の合成の別な解き方

補足　図から合成を行う方法もあるが，余弦（コサイン）の合成では間違えやすいので注意が必要

例１３）　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の変形

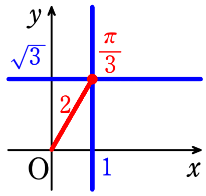
$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であり

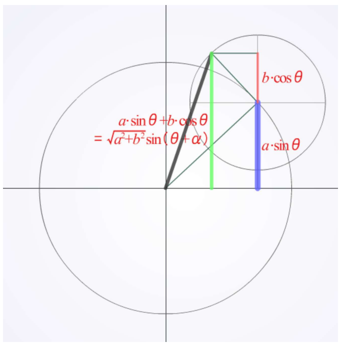
$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1\cdot\sin\theta+\sqrt{3}\cdot\cos\theta$$

$x=1$，$y=2$ となる線を引く

$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

交点の角度を読み取る





三角関数【三角関数の合成】 p.157～159

青チャートⅡ：例題 160～165

□三角関数の合成の応用

応用例題４）

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$$

合成で三角関数を統一する

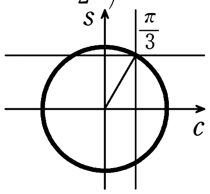
【加法定理から】

$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\sin x - \sqrt{3}\cos x$

$= 2\left(\sin x \cdot \dfrac{1}{2} - \cos x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$



【図形から】

$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1 \cdot \sin\theta - \sqrt{3} \cdot \cos\theta$

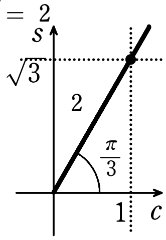
であるから

$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

を用いて

$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

$= 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$



解答　左辺を変形して　$2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

よって　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$　……①

教科書や問題集はどちらの方法で解いても良いから計算過程は省略されたりしている。

$\theta = x - \dfrac{\pi}{3}$ と置き換えをしてもＯＫ

範囲の吟味

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $0 - \dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$

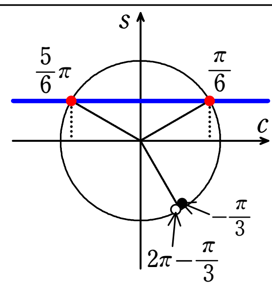
$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ であるから，① より

後で戻すので無理に足し引きしなくても良い

$x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi + \dfrac{2}{6}\pi$

ゆえに　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi$



補足　応用例題４の解は，関数

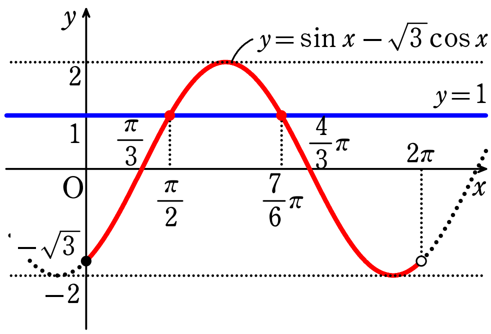
$y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

すなわち

$y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

のグラフと，直線 $y = 1$ の

$0 \leqq x < 2\pi$ における交点の x 座標である。



三角関数【三角関数の合成】 p.157〜159

青チャートⅡ：例題160〜165

問７） $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$ を解け。

解答　左辺を変形して　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) > 1$　　**合成で三角関数を統一する**

よって　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{1}{2}$　…… ①

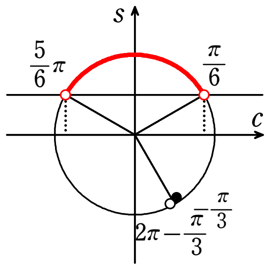
$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $0-\dfrac{\pi}{3} \leqq x-\dfrac{\pi}{3} < 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x-\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ であるから，① より

$\dfrac{\pi}{6} < x-\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{6}\pi$

$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{6}\pi < x < \dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{2}{6}\pi$

ゆえに　$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{7}{6}\pi$



補足　問７ の解は，関数

$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

すなわち

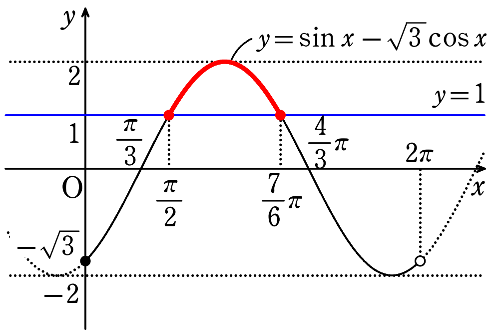
$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

のグラフと，直線 $y=1$ の

$0 \leqq x < 2\pi$ の部分において

$y=1$のグラフ より

$y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ が上に来る部分を指す。



三角関数【三角関数の合成】 p.157～159

青チャートⅡ：例題 160～165

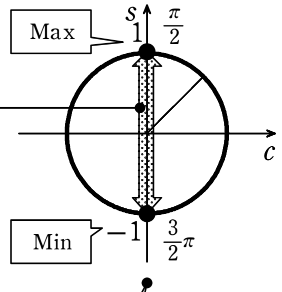
応用例題５） 次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=\sin x+\cos x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

合成で三角関数を統一する

教科書や問題集は加法定理の逆でも図でもどちらの方法で解いても良いから
計算過程は省略されたりしている。

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲での正弦なので
１周分移動する際の高さの範囲を見る



解答　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$-1 \leqq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ であるから

$\sqrt{2}$ 倍して　$-\sqrt{2} \leqq \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$

$$-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$$

よって　y の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は $-\sqrt{2}$

また　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ のとき，　Max のとき

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \text{ から } \quad x=\frac{\pi}{4}$$

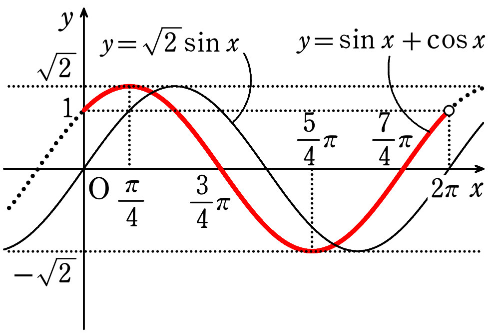
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき，　Min のとき

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi \text{ から } \quad x=\frac{5}{4}\pi$$

よって，この関数は $x=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $\sqrt{2}$ をとり，

$x=\frac{5}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

補足　関数 $y=\sin x+\cos x$
$(0 \leqq x < 2\pi)$
のグラフは，右の図のようになる。



三角関数【三角関数の合成】 p.157～159

青チャートⅡ：例題 160～165

4STEP数学Ⅱ　例題３１） 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=5\cos^2 x+6\sin x\cos x-3\sin^2 x \quad (0\leqq x<2\pi)$$

倍角で三角関数を統一する

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

より

$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$

解答

$$y=5\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+6\cdot\frac{\sin 2x}{2}-3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=3\sin 2x+4\cos 2x+1$$

合成で三角関数を統一する

$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ より

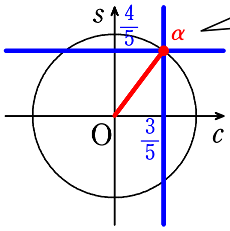
$3\sin 2x+4\cos 2x$

$=5\left(\sin 2x\cdot\dfrac{3}{5}+\cos 2x\cdot\dfrac{4}{5}\right)$

ここで $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ とすると

$5(\sin 2x\cos\alpha+\cos 2x\sin\alpha)$

$=5\sin(2x+\alpha)$



有名角ではないので

α と名前をつけて設定する

$$=5\sin(2x+\alpha)+1$$

ただし　$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-1\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq 1$ であるから

1 次式なので

とり得る値の範囲で求める

$-5\leqq 5\sin(2x+\alpha)\leqq 5$

$-4\leqq 5\sin(2x+\alpha)+1\leqq 6$

最大値は 6，最小値は -4

三角関数【三角関数の合成】 p.157～159

青チャートⅡ：例題 160～165

4STEP数学Ⅱ　問題３１８） $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(3)　$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = -\sqrt{2}$

【青チャート例題１４４(2)・１６１(2)類題】

解答　$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\left(\sin 2x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2x \cdot \dfrac{1}{2}\right)$

$= 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$2x$ のまま合成

であるから，方程式は

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}$$

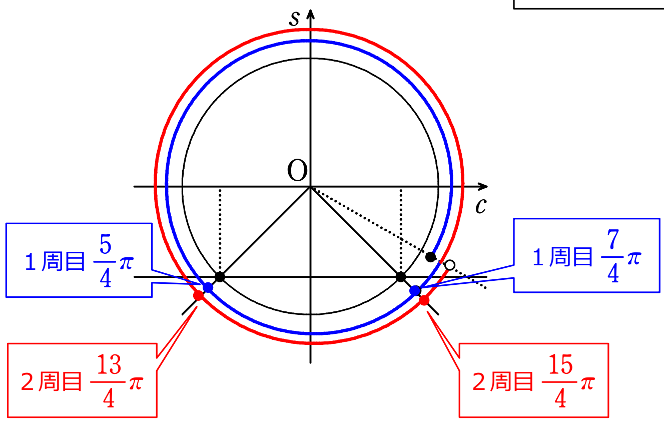
よって　$\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　…… ①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$0 \leqq 2x < 4\pi$$

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{23}{6}\pi = 4\pi - \dfrac{\pi}{6}$ であるから，

範囲の変換
特に 4π （２周分）
であることに注意



① より

$$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi$$

$$2x - \frac{2}{12}\pi = \frac{15}{12}\pi,\ \frac{21}{12}\pi,\ \frac{39}{12}\pi,\ \frac{45}{12}\pi$$

$$2x = \frac{17}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi,\ \frac{41}{12}\pi,\ \frac{47}{12}\pi$$

・不等式も同様に
・３周目も同様に

ゆえに　$x = \dfrac{17}{24}\pi,\ \dfrac{23}{24}\pi,\ \dfrac{41}{24}\pi,\ \dfrac{47}{24}\pi$