三角関数【関数】 p.144

青チャートⅡ：例題 146～147, 163～165

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】２次式の最大最小は２次関数が基本と考えられるようになろう

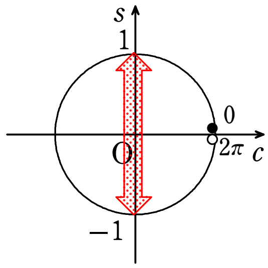
□三角関数を含む関数の最大値，最小値

応用例題２） $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta+2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの θ の値を求めよ。

考え方 … $\sin\theta = t$ とおくと，y は t の２次式で表される。このとき，t の値の範囲に注意する。

「置き換えたら範囲の吟味」は鉄則



解答 $\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

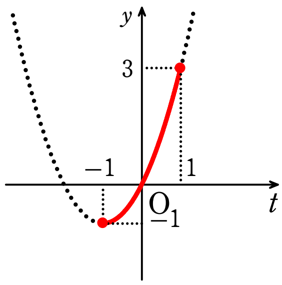
$$-1 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

１次の三角関数の最大・最小は「とり得る値の範囲（単位円の図）」で処理

与式の y を t で表すと

$$y=t^2+2t$$

２次の三角関数の最大・最小は「２次関数」で処理
※ⅠＡⅡＢＣの最大・最小問題の多くは２次関数に帰着させる



平方完成をすると

$$y=(t+1)^2-1$$

よって，① の範囲において，y は

頂点 $(-1, -1)$　軸 $t=-1$

y 切片 0

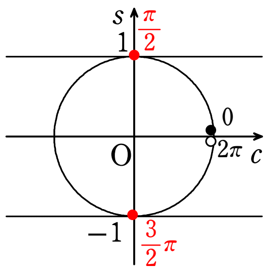
$t=-1$ のとき　$y=-1$

$t=1$ のとき　$y=1+2=3$

したがって

$t=1$ で最大値 3 をとり，

$t=-1$ で最小値 -1 をとる。



また，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

もとに戻すのを忘れない

$t=1$ のとき　$\sin\theta = 1$ なので　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，

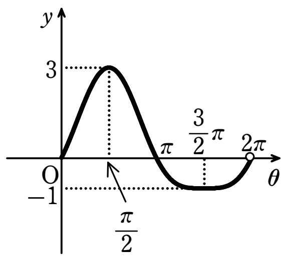
$t=-1$ のとき　$\sin\theta = -1$ なので　$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

したがって，この関数は

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 3 をとり，

$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる。

補足 図は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ における，関数 $y=\sin^2\theta+2\sin\theta$ のグラフの概形である。



三角関数【関数】 p.144

青チャートⅡ：例題146~147, 163~165

演習問題８） 関数 $y=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin x+\cos x$ として，y を t の関数で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

$\sin x\pm\cos x$ を見たら２乗する

(1) $t=\sin x+\cos x$ の両辺を 2 乗すると　$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

相互関係の式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より　$t^2=1+2\sin x\cos x$

よって　$2\sin x\cos x=t^2-1$

したがって　$y=(t^2-1)+t$

すなわち　$y=t^2+t-1$

(2) $t=\sin x+\cos x$

三角関数の合成を行うと

$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

「置き換えたら範囲の吟味」は鉄則
※１次の異なる三角関数は三角関数の合成でまとめる

ここで，$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

１次の三角関数の最大・最小は
「とり得る値の範囲（単位円の図）」
で処理

であるから　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) $y=t^2+t-1$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

２次の三角関数の最大・最小は
「２次関数」で処理
※ⅠAⅡBの最大・最小問題の
多くは２次関数に帰着させる

頂点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}\right)$，軸　$t=-\dfrac{1}{2}$

下に凸

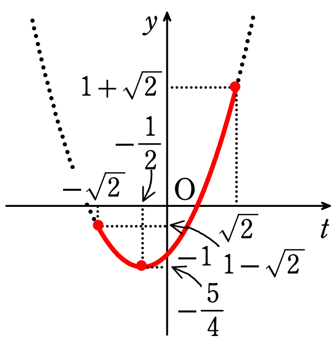
$t=-\sqrt{2}$ のとき　$y=2-\sqrt{2}-1=1-\sqrt{2}$

$t=\sqrt{2}$ のとき　$y=2+\sqrt{2}-1=1+\sqrt{2}$

よって，(2) の範囲で y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $1+\sqrt{2}$ をとり，

$t=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとる。



したがって，最大値は $1+\sqrt{2}$，

最小値は $-\dfrac{5}{4}$ である。

三角関数【関数】 p.144

青チャートⅡ：例題146～147, 163～165

例題） $X=\cos\theta$，$Y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$とするとき，$3X+4Y$ の最大値を求めよ。

【青チャート数学Ⅱ重要例題１６５類題】

解答 $3X+4Y=3\cos\theta+4\sin\theta=4\sin\theta+3\cos\theta$

$=5\sin(\theta+\alpha)$

ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\alpha\leqq\theta<2\pi+\alpha$ であるから，

$5\sin(\theta+\alpha)$ は $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 5 をとる。

したがって，$3X+4Y$ の最大値は　5

参考 (1) $3X+4Y$ が最大値をとるときの X，Y の値は

$X=\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，

$Y=\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$