

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】ベクトルの加法, 減法, 実数倍の意味を理解し, 計算することができる。

### □ベクトルの加法

2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  があるとき, 1点  $O$  を任意に定めて

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OC}$$

となる点  $A$ ,  $C$  をとり, ベクトル  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  を考える。

この  $\vec{c}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の **和** といい,  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  で表す。

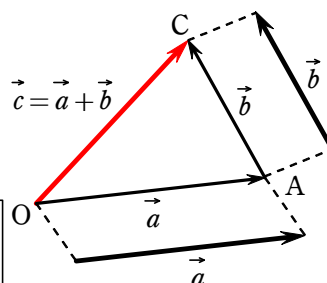
すなわち

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

始□ + □終 = 始終

$$\bigcirc \square + \square \triangle = \bigcirc \triangle$$

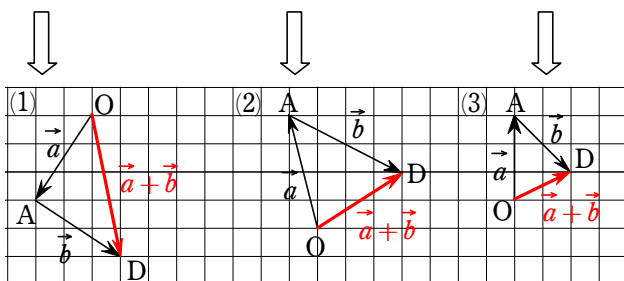
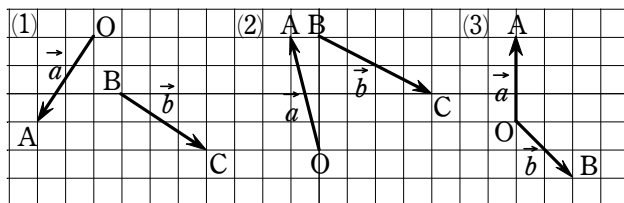
上の定義は, 点  $O$  のとり方に無関係である。



矢印をつなげてスタート (始点) から  
ゴール (終点) までを考える。

(いくら寄り道しても始点と終点のみで決まる)

例) 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{a} + \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ。



$\vec{a}$  か  $\vec{b}$  を動かしてつなげて,  
始点と終点を結ぶ。

向きが大事なので, 分かりやすく  
はっきりと示す。

ベクトルの加法については, 次の法則が成り立つ。

### ベクトルの加法

1 交換法則

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

入れ替えても同じ答えになる法則

2 結合法則

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

カッコの場所を変えても同じ答えになる法則

文字の計算と同じようなもの

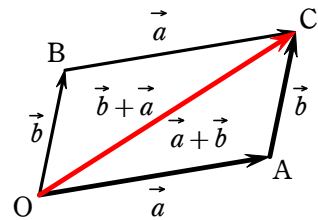
**1の証明** 平行四辺形 OACB において,

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b} \text{ とすると } \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}$$

$$\text{よって } \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\text{ゆえに } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{終}$$



【注意】 平行四辺形 OACB において,  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  が成り立つ。

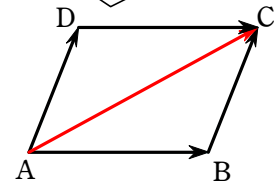
【補足】 平行四辺形を使って, ベクトルの和を図示することもできる。

右の図の平行四辺形 ABCD において,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  であるから, 図からわかるように, 次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



平行四辺形の対角線が  
ベクトルの和になる

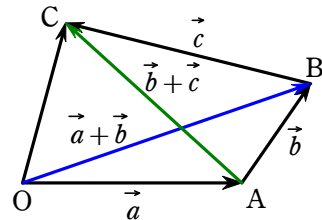


**2の証明** 図から

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\text{ゆえに } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



等式  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  が成り立つから, これらの和を単に  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  と書く。

$$\begin{aligned} \text{例)} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} \quad \text{終} \end{aligned}$$

$$\bigcirc \square + \square \triangle = \bigcirc \triangle$$



## □逆ベクトルと零ベクトル

ベクトル  $\vec{a}$  と大きさが等しく, 向きが反対であるベクトルを

$\vec{a}$  の **逆ベクトル** といい,  $-\vec{a}$  で表す。

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  とすると,  $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$  である。

$$\text{すなわち } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

有向線分 AB の始点 A と終点 B が一致すると, AB は AA となる。

このとき,  $\overrightarrow{AA}$  を大きさが 0 のベクトルと考え, **零ベクトル** といい,  $\vec{0}$  で表す。

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \text{ より } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

すなわち, 任意の点 A に対して,  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  である。

零ベクトルの向きは考えない。

▼  
A

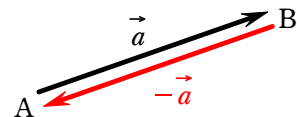
A から A までなので,  
距離がない

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

$$\bigcirc \bigcirc = \vec{0}$$

前後同じなら  $\vec{0}$



逆ベクトルと零ベクトルには、次の性質がある。

逆ベクトルと零ベクトル

$$1 \quad \vec{0} + (-\vec{0}) = \vec{0}$$

$$2 \quad \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

例1) 3点 A, B, C について、次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA} \\ &= \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0} \quad \text{終} \end{aligned}$$

$\vec{BC} + \vec{CA}$  を  
先にしてもよい

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

【補足】 次の条件を満たす集合  $V$  を、 $n$  次元ベクトル空間という。 [2] 任意の実数  $k, l$  に対し、 $x$  の  $k$  倍  $kx$  が定まり、

[1] 和  $x + y$  が定まり、次のことが成り立つ

次のことが成り立つ

(1) 交換法則  $x + y = y + x$  が成り立つ

(5)  $k(lx) = (kl)x$  (結合法則)

(2) 結合法則  $(x + y) + z = x + (y + z)$  が成り立つ

(6)  $(k + l)x = kx + lx$  (分配法則)

(3) 任意の  $x$  に対して  $x + \vec{0} = x$  を成り立たせるような要素  
(零元  $\vec{0}$ ) がただ1つ存在する

(7)  $k(x + y) = kx + ky$  (分配法則)

(4) 任意の  $x$  に対して  $x + x' = \vec{0}$  を成り立たせるような要素  
(逆元  $-x$ ) が存在する

[3]  $V$  のすべての元は、 $n$  個の固定した基

$e_1, e_2, \dots, e_n$  により、

$a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$  の形に

ただ1通りに表される。

□ベクトルの減法

2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  があるとき、点  $O$  を任意に定めて、 $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$  となる2点 A, B をとると、 $\vec{b} + \vec{BA} = \vec{a}$  である。そこでベクトル  $\vec{BA}$  を、 $\vec{a}$  から  $\vec{b}$  を引いた 差 といい、 $\vec{a} - \vec{b}$  で表す。すなわち

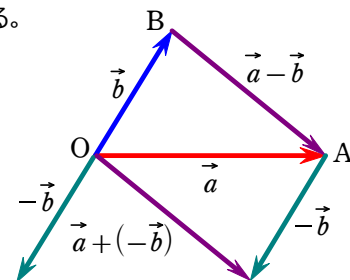
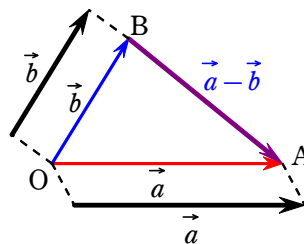
$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

また、 $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$  から

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

が成り立つ。更に、右の図から、次の等式が成り立つことがわかる。

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



$$\vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

始点が同じなら □前 - □後 = 後前

$$\vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

とみるとベクトルの合成

$$\vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

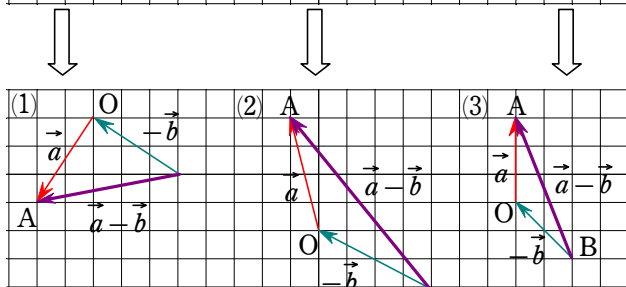
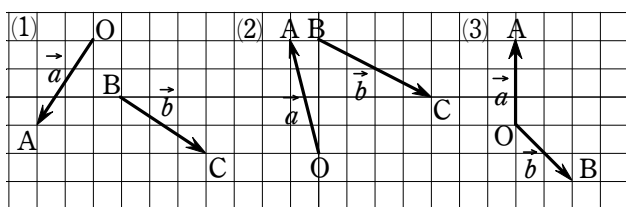
とみるとベクトルの分解になる



逆ベクトルと加法で考えると

$$\begin{aligned} \vec{OA} - \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{BO} \\ &= \vec{BO} + \vec{OA} \\ &= \vec{BA} \end{aligned}$$

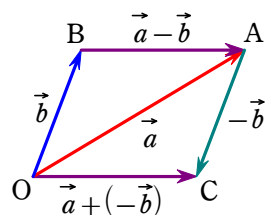
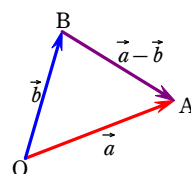
例) 次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{a} - \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ。



- ① 引く方のベクトルを逆向き ( $-\vec{b}$ ) にする。
- ②  $\vec{a}$  か  $-\vec{b}$  を動かしてつなげて, 始点と終点を結ぶ。
- ③ 向きが大事なので, 分かりやすくはっきりと示す。

別解

- ① 2つのベクトルの始点を重ねる。
- ② 2つのベクトルの終点を結ぶ。
- ③ 引き算の最初に書かれるベクトル (引かれる方) の終点側に矢印を付ける。



ベクトルの減法について, 次の性質が成り立つ。

1 が成り立つことは, 右の図の平行四辺形 OCAB を用いて確かめられる。

$$1 \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$2 \quad \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

文字の計算と同じようなもの

問5) 長方形 ABCD において,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,

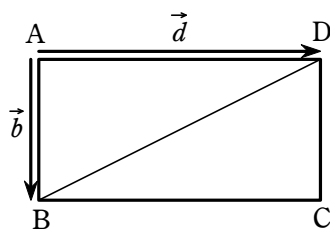
$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とする。次のベクトル

$\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{BD}$       (2)  $\overrightarrow{DB}$

【解答】 (1)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{d} - \vec{b}$

(2)  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{d}$



後前 = □前 - □後