

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】座標平面上のベクトルを成分で表すことを知り、その計算法則や性質が理解できる。

□ベクトルの成分

座標平面の原点を O とし、ベクトル $\vec{a}$ に対して

$\vec{a} = \vec{OA}$ となる点 A をとり、 A の座標を (a_1, a_2) とする。

A から x 軸、 y 軸に、それぞれ垂線、 AK を下ろすと

$$\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{OK}$$

ここで、 x 軸上に点 $E(1, 0)$ 、 y 軸上に点 $F(0, 1)$ をとり、

$\vec{e}_1 = \vec{OE}$ 、 $\vec{e}_2 = \vec{OF}$ とする。

$\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ を座標軸に関する **基本ベクトル** という。このとき

$$\vec{OH} = a_1 \vec{OE} = a_1 \vec{e}_1, \quad \vec{OK} = a_2 \vec{OF} = a_2 \vec{e}_2$$

となるから、上のベクトル $\vec{a}$ は、基本ベクトル $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ を用いて

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{1 次結合の形} \end{array} \right.$$

の形にただ 1 通りに表すことができる。この実数 a_1 、 a_2 をベクトル $\vec{a}$ の **成分** といい、 a_1 を **x 成分**、 a_2 を **y 成分** という。

ベクトルは、その成分を用いて、次のようにも書き表す。これを $\vec{a}$ の **成分表示** という。

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{横}(\vec{e}_1 \text{ 方向}) \text{ に } a_1, \text{ 縦}(\vec{e}_2 \text{ 方向}) \text{ に } a_2 \text{ だけ進むベクトルと読み取る} \end{array} \right.$$

$$\text{特に } \vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1), \vec{0} = (0, 0)$$

基本ベクトルで一意的に表せる
(ベクトルが決まると実数の組が決まる)

上のように、ベクトル $\vec{a}$ を、原点 O を始点とする有向線分を用いて、 $\vec{a} = \vec{OA}$ と表すと、 $\vec{a}$ の成分の組 (a_1, a_2) は、終点 A の座標と一致する。

よって、2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について、それらが等しいための必要十分条件を、成分を用いて表すことができる。

すなわち、次のことが成り立つ。(ベクトルの相等)

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

成分表示で一意的に決まる
(実数の組が決まるとベクトルが決まる)

ベクトル $\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は、右の図で、

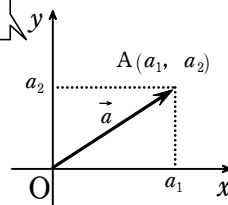
線分 OA の長さであるから、次のようになる。

ベクトルの成分と大きさ

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ のとき } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

各成分の 2 乗の和に
ルートを付ける

三平方の定理
(斜辺)² = 〇² + 〇²

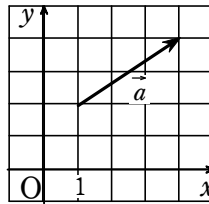


例6) 右の図のベクトル $\vec{a}$ の成分表示は

$$\vec{a} = (3, 2)$$

また、ベクトル $\vec{a}$ の大きさは

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad \text{終}$$



横に+3, 縦に+2
だけ進むベクトル

大きさは各成分の2乗の和に
ルートを付ける

□成分によるベクトルの演算

ベクトルの加法, 減法や実数倍などの演算を,
成分を用いて表してみよう。

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ は,

基本ベクトル $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ を用いて

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

と表されるから

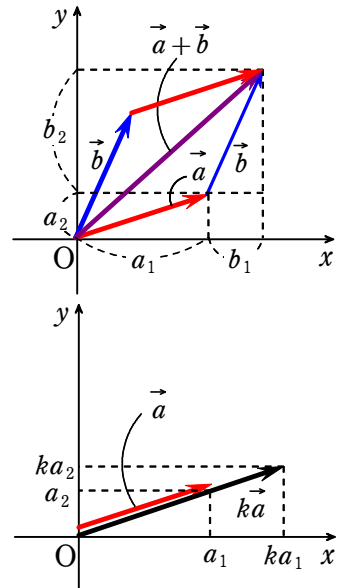
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

また, k を実数とすると

$$k\vec{a} = ka_1\vec{e}_1 + ka_2\vec{e}_2 = (ka_1, ka_2)$$

成分で表されたベクトルの演算について

まとめると, 次のようになる。



成分によるベクトルの演算

$$1 \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$2 \quad k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2) \quad \text{ただし } k \text{ は実数}$$

足し算、引き算は成分ごとに行う

実数倍は
各成分に掛ける

$$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$$

でもある

一般に, k, l を実数とすると, 次のことが成り立つ。

$$k(a_1, a_2) + l(b_1, b_2) = (ka_1 + lb_1, ka_2 + lb_2)$$

特に, $k=1, l=-1$ とすると, 次のようになる。

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

例7) $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-1, -4)$ のとき

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(1, -2) - 2(-1, -4)$$

成分の表示に
置き換える

$$= (3 \cdot 1 - 2(-1), 3(-2) - 2(-4))$$

$$= (5, 2)$$

実数倍は
各成分に掛ける

足し算、引き算は成分ごとに行う

終

行ベクトル: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

列ベクトル: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

どちらも数ベクトル(表し方の違い)であり, 行列と捉えるときに違いがある

例題 1) $\vec{a}=(1, 1)$, $\vec{b}=(1, -1)$ のとき, ベクトル $\vec{p}=(5, 1)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

【解答】 $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$$(5, 1) = s(1, 1) + t(1, -1)$$

$$= (s+t, s-t)$$

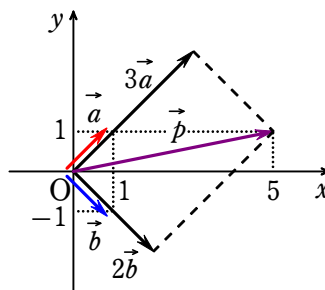
$$\text{よって } s+t=5, \quad s-t=1$$

$$\text{これを解いて } s=3, \quad t=2$$

$$\text{したがって } \vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$$

「適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。」と考えてもよい

それぞれの成分を
等号でつなげて方程式を解く



例題 2) ベクトル $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(x-2, x)$ が平行になるように, x の値を定めよ。

【解答】 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ であるから, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための必要十分条件は,

$$\vec{b} = k\vec{a} \text{ を満たす実数 } k \text{ が存在することである。}$$

① 平行条件を用いて式を表す
(文字を含まない方に k を掛ける方がよい)

$$\vec{b} = k\vec{a} \text{ から } (x-2, x) = k(1, 2)$$

② ①の式を成分で書き換える

$$\text{よって } x-2=k, \quad x=2k$$

③ 成分ごとに掛ける

④ それぞれの成分を等号でつなげて連立方程式を解く

$$\text{これを解いて } k=2, \quad x=4$$

$$\text{答 } x=4$$

別解 問題 7 に

「 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ について, 次のことが成り立つことを示せ。

$$\vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \text{ とある}$$

このことを用いると, $\vec{a} // \vec{b}$ になるための必要十分条件は

$$1 \cdot x - 2 \cdot (x - 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad -x + 4 = 0 \quad \therefore x = 4$$

補足(証明) (内積を学習してから)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a} // \vec{b}$ のとき

$$\theta = 0^\circ \text{ または } \theta = 180^\circ$$

$$\cos 0^\circ = 1, \cos 180^\circ = -1 \text{ から}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ または } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{すなわち } |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{両辺を 2 乗して } |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

両辺を成分で表すと

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$\text{整理すると } a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 = 0$$

$$\text{すなわち } (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = 0$$

$$\text{よって } a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

逆に, このとき $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ となり,

$\vec{a} // \vec{b}$ が成り立つ。

別解 ($\vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ の証明)

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき, 次のことが成り立つ。

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{b} = k \vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

$$\iff (b_1, b_2) = k(a_1, a_2)$$

$$\text{よって, } \vec{a} // \vec{b} \text{ ならば } b_1 = k a_1, b_2 = k a_2$$

となる実数 k があるから

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 \times k a_2 - a_2 \times k a_1 = 0$$

逆に, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ …… ① のときを考える。

$$a_1 \neq 0 \text{ のとき, ① から } b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2$$

$$\frac{b_1}{a_1} = k \text{ とおくと } b_2 = k a_2, b_1 = k a_1$$

$$a_1 = 0 \text{ のとき } a_2 \neq 0 \text{ で, ① から } b_1 = 0$$

$$\frac{b_2}{a_2} = k \text{ とおくと } b_2 = k a_2, b_1 = k a_1 (= 0)$$

したがって, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ のとき,

$\vec{b} = k \vec{a}$ となる実数 k がある。

すなわち, $\vec{a} // \vec{b}$ が成り立つ。

$$\text{以上から } \vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

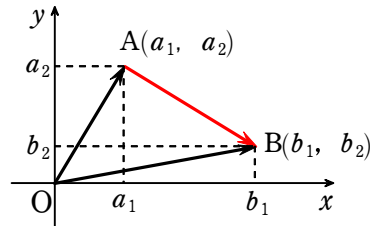
□ 点の座標とベクトルの成分

座標平面上の2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ について, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めてみよう。

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2), \quad \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (b_1, b_2) - (a_1, a_2) \\ &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \end{aligned}$$



また $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

すなわち, 次のことが成り立つ。

$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさ

2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ について

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \quad \text{終点の座標から始点の座標を引く}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \quad \text{各成分の2乗の和にルートをつける}$$

例8) 2点 $A(3, -1)$, $B(-1, -4)$ について

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1 - 3, -4 - (-1)) \\ &= (-4, -3) \end{aligned} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

この場合は終点が B, 始点が A なので, B から A を引く

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5 \quad \text{各成分の2乗の和にルートをつける} \quad \text{終}$$

例題3) 4点 $A(1, 5)$, $B(-2, 1)$, $C(0, -1)$, D を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形であるとする。頂点 D の座標を求めよ。

【解答】 四角形 ABCD が平行四辺形で

あるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

である。

頂点 D の座標を (x, y) とすると

$$\overrightarrow{AD} = (x - 1, y - 5)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0 - (-2), -1 - 1) = (2, -2)$$

であるから

$$(x - 1, y - 5) = (2, -2)$$

よって $x - 1 = 2, y - 5 = -2$

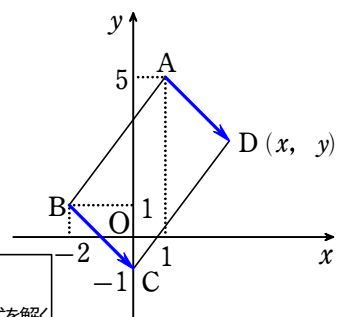
これを解いて $x = 3, y = 3$

したがって, 頂点 D の座標は $(3, 3)$

② 終点から始点を引く

① 他の組合せも考えられるが, 未知な点である D が終点となるようなベクトルと平行なベクトルの組合せを考える。(したがって $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ でもよい)

A, B, C, D が一直線上にあるような平行四辺形にはならない
(今回はなり得ないので触れていないが)



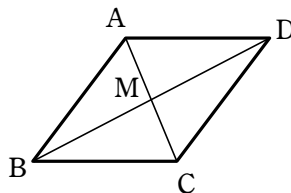
③ それぞれの成分を等号でつなげて方程式を解く

補足 平行四辺形になるための条件

中学校で四角形 ABCD が平行四辺形になるための条件として次のようなものを学んでいる

- [1] $AD \parallel BC, AB \parallel DC$ (定義)
- [2] $AD \parallel BC, AD = BC$
(または $AB \parallel DC, AB = DC$)
- [3] $AD = BC, AB = DC$
- [4] $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
- [5] 対角線 AC, BD が互いに他を 2 等分する

[2] はベクトルだと
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
だけで表せる



また, 条件をベクトルで表すと次のように置き換えることができる。

[ア] 「平行 ($AD \parallel BC$)」は, 「 $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$ となる 0 でない実数 k が存在する」

[イ] 「線分が等長 ($AD = BC$)」は, 「 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ 」

[ウ] 「等角 ($\angle A = \angle C$)」は, 「 $\cos \angle A = \cos \angle C$ 」で 「 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CD}|}$ 」

[エ] 「線分の中点 M」は, 「 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ 」