

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】ベクトルに特有の演算である「内積」の意味と性質について理解し、計算することができる。

□ベクトルの内積

右の図の $\triangle OAB$ において、余弦定理により、次の等式が成り立つ。

$$BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \cos \theta$$

この $OA \times OB \cos \theta$ をベクトル $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ で表し、

ベクトルでの新しい演算として考えよう。

$\vec{0}$ でない2つのベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とする。

1点 O を定め、 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ となる点 A , B をとる。

このとき、半直線 OA , OB のなす角 θ のうち、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

であるものを、ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ という。

↓ $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とする。このとき、積

$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **内積** といい、記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \text{ただし、}\theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}$$

$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。

注意 2つのベクトルの内積は、ベクトルではなく、**実数（スカラー）** である。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = (\vec{a} \text{ の長さ}) \times (\vec{b} \text{ が } \vec{a} \text{ 上に作る符号付きの影の長さ})$$

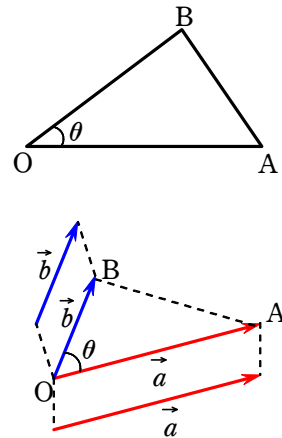
例9) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ とし、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。

(1) $\theta = 60^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

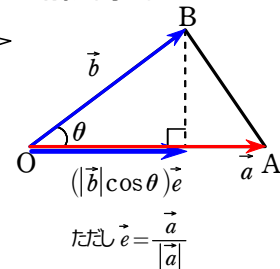
(2) $\theta = 135^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 135^\circ \\ &= 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -3\sqrt{2} \quad \text{終} \end{aligned}$$



内積は「(中点, 中黒)」の記号を用いる
ベクトル同士の掛け算では「 $\times$ 」の記号は「外積」と呼ばれるので区別すること

正射影で考えると...



内積の具体例としては
・風向きとヨットの進む量
・物理における仕事を表す式
 $W = Fx \cos \theta = \vec{f} \cdot \vec{x}$
などがある。

おさらい

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

例10) 右の図の直角三角形OABについて、次の内積を求めよ。

- (1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$ (3) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB}$

【解答】

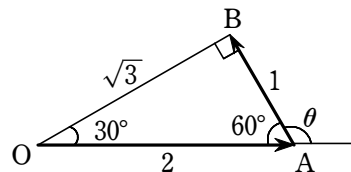
(1) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

(2) $AB = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

また、 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{AB}$ のなす角は 120° であるから

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

(3) $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{AB}$ のなす角は 90° であるから $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3} \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$



【参考】(1) $\overrightarrow{OA}$ の $\overrightarrow{OB}$ 上への
正射影の長さは $\sqrt{3}$ であるから
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ 終

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \text{「}\theta = 0^\circ \text{ または } \theta = 180^\circ\text{」が成り立つ。ここで}$

$\theta = 0^\circ$ のときは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きに平行である。

$\theta = 180^\circ$ のときは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反対の向きに平行である。

また、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において

$\theta = 0^\circ \iff \cos \theta = 1$

$\theta = 180^\circ \iff \cos \theta = -1$

よって、 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、次のことが成り立つ。

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \text{「}\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ または } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \text{」}$

更に、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の符号は、 $\cos \theta$ の符号に一致するから

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

$\theta = 90^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\cos \theta$	1	+	0	-	-1
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$ \vec{a} \vec{b} $	+	0	-	$- \vec{a} \vec{b} $

$\theta = 90^\circ$ のとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい、 $\vec{a} \perp \vec{b}$ と書く。

以上のことから、次のことが成り立つ。

ベクトルの垂直・平行と内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

1 (垂直条件) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2 (平行条件) $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ または $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

垂直なときは $\theta = 90^\circ$ なので
 $\cos 90^\circ = 0$ を掛けることとなる

平行なときは $\theta = 0^\circ$ または $\theta = 180^\circ$ なので
 $\cos 0^\circ = 1$ または $\cos 180^\circ = -1$ を掛けることとなる

【補足】 θ が鋭角 $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ θ が鈍角 $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

コラム

ベクトルの内積

ベクトルの内積について学んだ A さんが先生と話しています。

A: 内積の式 $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ は急に出てきたような感じがします。

先生: 物理では、内積で表せる量がある。たとえば、物体に力を加えてその物体を移動させたとき、その力は「仕事」をしたという。

A: 物理の授業で習いました。

先生: この仕事をベクトルの内積で表すことができる。

ここでは、力を $\vec{F}$ 、物体の変位(移動)を $\vec{x}$ で表すことにしよう。たとえば、平らな地面の上で物体に一定の力をはたらかせてその力の向きに物体を動かしたとする。つまり、力の向きと物体の移動の向きが同じとき

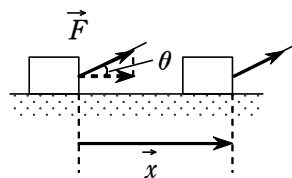
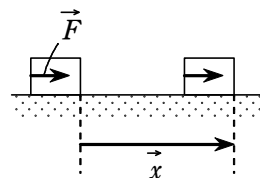
仕事は力の大きさと移動距離の積 $|\vec{F}| |\vec{x}|$ で表される。

A: 向きが異なるときはどうするんですか。

先生: 右の図のように、一定の力 $\vec{F}$ でひもを斜め上方に引き続けて物体を移動させたとして。

このとき、 $\vec{F}$ と $\vec{x}$ のなす角を θ とすると、物体が移動した向き、つまり $\vec{x}$ の向きに $|\vec{F}| \cos \theta$ の力がはたらいたと考える。したがって、仕事は $|\vec{F}| \cos \theta \times |\vec{x}|$ つまり $\vec{F} \cdot \vec{x}$ で表される。

一般に、仕事は内積 $\vec{F} \cdot \vec{x}$ で表されて、仕事は 0 や負になる場合もあるんだ。



練習) 上のように平らな地面で物体を移動させたとき、重力が物体にした仕事を内積を利用して求めてみよう。

【解答】 物体の移動を表すベクトルを $\vec{x}$ 、重力を表すベクトルを $\vec{F}$ とすると、

$\vec{F} \perp \vec{x}$ であるから

$$\vec{F} \cdot \vec{x} = 0$$

したがって、重力が物体にした仕事は 0 である。

□内積と成分

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して,

1 点 O を定めて

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \angle AOB = \theta$$

とする。

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき, $\triangle OAB$ に余弦定理を

適用すると, 次の等式が成り立つ。

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

等式 $\textcircled{1}$ は, $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のときも成り立つ。

$$AB = |\vec{b} - \vec{a}|, \quad OA = |\vec{a}|, \quad OB = |\vec{b}|, \quad OA \times OB \times \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

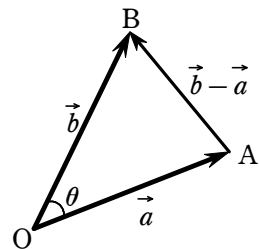
であるから, $\textcircled{1}$ は次のように表される。

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{よって } (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{ゆえに } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

この式は, $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも, 明らかに成り立つ。 終



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

これの2乗なので
ルートが外れる。
 $|\vec{b}|^2$ も $|\vec{b} - \vec{a}|^2$ も同じ

ベクトルの内積は, 成分を用いて, 次のように表される。

内積と成分

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \leftarrow \text{x 成分同士、y 成分同士を掛けて足す}$$

例10 $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (4, 1)$ のとき, その内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 3 \times 1 = 11$$

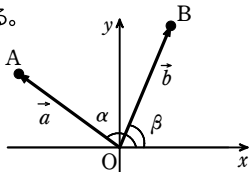
終

補足別解 余弦定理を用いた証明は空間でもほぼそのまま使える。

平面だけに限れば $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ からでも証明ができる。

座標平面において, 原点を O とし, 図のように $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を考える。

ただし, $0 \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$ とする。



$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2)$$

とすると

$$a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_2 = |\vec{a}| \sin \alpha$$

$$b_1 = |\vec{b}| \cos \beta, \quad b_2 = |\vec{b}| \sin \beta$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\alpha - \beta$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha - \beta)$$

$$= |\vec{a}| |\vec{b}| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= |\vec{a}| \cos \alpha \cdot |\vec{b}| \cos \beta + |\vec{a}| \sin \alpha \cdot |\vec{b}| \sin \beta$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

□ベクトルのなす角

内積の定義から、ベクトルのなす角について、次のことがいえる。

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \text{ただし } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とみれば

2つの単位ベクトルの内積

成分表示された2つのベクトルのなす角を求めてみよう。

例1 1) $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (3, -1)$ のなす角 θ を求める。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 + 2 \times (-1) = 10$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{10}{2\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 45^\circ$$

〔終〕

※ まずは内積と

それぞれのベクトルの大きさを求める。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ なら垂直なので

$\theta = 90^\circ$ 確定

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について、垂直条件より

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

が成り立つ。この関係は、成分を用いて表すと、次のようになる。

ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で、 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

内積を利用して、ベクトルの成分を求めることを考えてみよう。

例題4) ベクトル $\vec{a} = (4, 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

解答 $\vec{e} = (x, y)$ とする。

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 4 \cdot x + 3 \cdot y$$

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{すなわち } 4x + 3y = 0$$

$$\text{よって } y = -\frac{4}{3}x \quad \cdots \cdots \text{①}$$

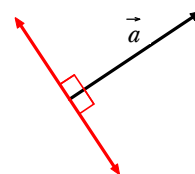
$$\text{また, } |\vec{e}|^2 = 1^2 \text{ から } x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①と②から } \frac{25}{9}x^2 = 1 \quad \text{ゆえに } x = \pm \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{3}{5} \text{ のとき } y = -\frac{4}{5}, \quad x = -\frac{3}{5} \text{ のとき } y = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって } \vec{e} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

垂直が出てきたら
垂直条件を



図で考えると
2つあるのが明らか

例) $\vec{a}=(\sqrt{3}, -1)$ に垂直で大きさが 4 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

【教科書通りの【解答】】 $\vec{b}=(x, y)$ とする。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}x + (-1) \cdot y$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ すなわち } \sqrt{3}x - y = 0$$

$$\text{よって } y = \sqrt{3}x \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$|\vec{b}|^2 = 4^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 4^2 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①を②に代入すると } x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 16$$

$$\text{整理すると } 4x^2 = 16 \text{ すなわち } x = \pm 2$$

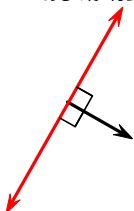
$$\text{①に代入して}$$

$$x=2 \text{ のとき } y=2\sqrt{3}, \quad x=-2 \text{ のとき } y=-2\sqrt{3}$$

$$\text{答 } \vec{b}=(2, 2\sqrt{3}), (-2, -2\sqrt{3})$$

「 $\vec{b}=(\pm 2, \pm 2\sqrt{3})$ (複号同順)」
と書くことがある。

図で考えると
2つあるのが明らか



垂直が出てきたら
垂直条件を

【垂直なベクトルを使つての【解答】】

垂直なベクトルの一つは $\vec{n}=(1, \sqrt{3})$ である。

ここで $|\vec{n}| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ であるから

$\vec{a}$ に垂直で大きさが 4 のベクトル $\vec{b}$ は

$$\vec{b} = \pm \frac{4}{2} \vec{n} = \pm 2(1, \sqrt{3}) = (\pm 2, \pm 2\sqrt{3})$$

(複号同順)

垂直なベクトルの成分の一つは
 x 成分と y 成分を入れ替えて
片方だけ成分の符号を変えると作れる

向きに指定がなければ $\pm$
 $\frac{\text{新しい大きさ}}{\text{元の大きさ}}$ と一緒に成分に掛ける