

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】平面上の点の位置をベクトルで表す「位置ベクトル」という考え方が理解できる。

図形の性質を調べるときには、共通の始点をもった有向線分が表すベクトルを考えると便利ことがある。このようなベクトルについて考えよう。

□位置ベクトル

平面上で、1点 O を固定して考えると、任意の点 P の位置は、ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ によって定められる。このとき、 $\vec{p}$ を点 O に関する点 P の **位置ベクトル** という。

また、位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を $P(\vec{p})$ で表す。

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して、 $\vec{a} = \vec{b}$ のとき、 A と B は一致する。

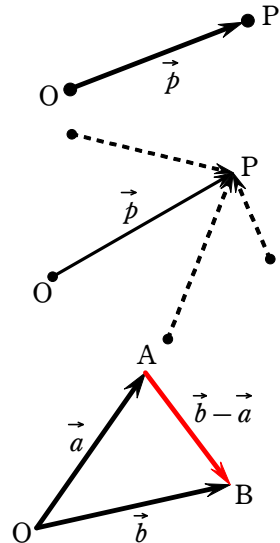
注意 位置ベクトルにおける点 O は平面上のどこに定めてもよい。

以下、特に断らない限り、点 O に関する位置ベクトルを考える。

$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{\Delta O} - \overrightarrow{\Delta O}$ と分解できるので

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は次のように表される。

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$



□線分の内分点・外分点の位置ベクトル

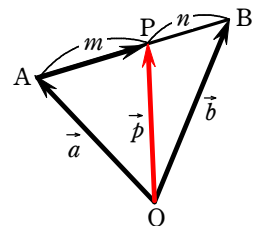
$$AP : AB = m : (m + n)$$

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ を求めてみよう。

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} \text{ であるから } \vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n} (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\text{ゆえに } \vec{p} = \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b}$$

$$\text{よって } \vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$



$m > n$ のとき、2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に外分する

点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ を求めてみよう。

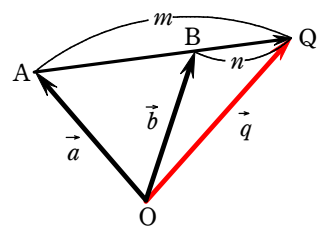
$$AQ : AB = m : (m - n)$$

$m > n$ のとき

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m-n} \overrightarrow{AB} \text{ であるから } \vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n} (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\text{ゆえに } \vec{q} = \left(1 - \frac{m}{m-n}\right) \vec{a} + \frac{m}{m-n} \vec{b}$$

$$\text{よって } \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n} \dots\dots ①$$



$m < n$ のときも、同じ式 ① が得られる。

深める 上の式 ① について, $m < n$ のときも同じ式が得られることを確かめてみよう。

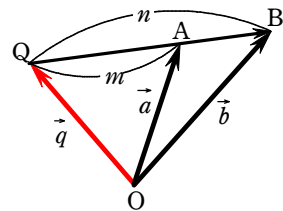
解答 $\vec{AQ} = -\frac{m}{n-m}\vec{AB}$ であるから $\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a})$

$m < n$ のとき

ゆえに $\vec{q} = \left(1 - \frac{m}{m-n}\right)\vec{a} + \frac{m}{m-n}\vec{b}$

AQ : AB = $m : (n-m)$
であり, 向きが異なる

よって $\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$



線分の内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m : n$ に内分する点 P, 外分する点 Q の位置ベクトルを, それぞれ $\vec{p}$, $\vec{q}$ とすると

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}, \quad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

図形と方程式のときと同じ

空間ベクトルでも同じ式

特に, 線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

<補足> 内分の場合の n を $-n$ におき換えたものが, 外分の場合である。

点 P は 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を内分する点で,
AB : AP = $1 : t$, $0 < t < 1$ であるとする。

このとき, P は線分 AB を $t : (1-t)$ に内分する点であり,
P の位置ベクトル $\vec{p}$ は, 次のように表される。

$$\vec{p} = \frac{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}}{t + (1-t)} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

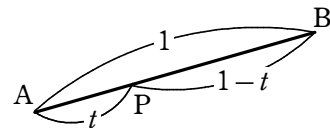
<注意> 線分 AB の内分点も外分点もその位置ベクトルは,
適当な実数 t を用いて $(1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表される。

$$m : n = \frac{m}{m+n} : \frac{n}{m+n} \text{ であり, } \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1 \text{ である。}$$

$$\text{したがって, } \frac{m}{m+n} = t \text{ とおくと, } 0 < t < 1 \text{ であり}$$

$$\frac{n}{m+n} = 1 - \frac{m}{m+n} = 1 - t$$

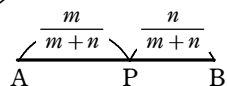
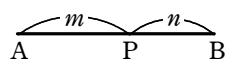
$$\text{よって } t : (1-t) \text{ と表せるので } \vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$



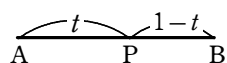
$(1-t) + t = 1$ となるので

分母が省略される

→図形の問題で良く用いる形



$$t = \frac{m}{m+n}$$



例 13) 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して, 線分 AB を

$$2 : 1 \text{ に内分する点の位置ベクトルは } \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$1 : 2 \text{ に外分する点の位置ベクトルは } \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{1-2} = 2\vec{a} - \vec{b} \quad \text{終}$$

□三角形の重心の位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, その重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を求めてみよう。

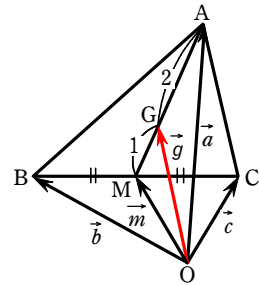
辺 BC の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は $\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ ①

重心 G は中線 AM を $2:1$ に内分する点であるから $\vec{g} = \frac{\vec{a} + 2\vec{m}}{2+1}$

① より, $2\vec{m} = \vec{b} + \vec{c}$ であるから

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

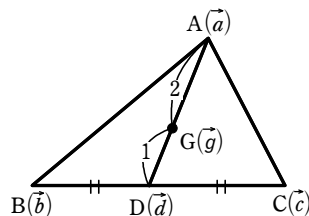
三角形の重心は, 3本の中線が交わる点で, 各中線を $2:1$ に内分する。



三角形の重心の位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$



$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

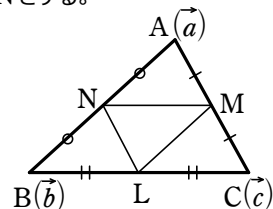
始点がそろっていることが大事

例題 6) $\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB の中点を, それぞれ L , M , N とする。

また, $\triangle ABC$ の重心を G , $\triangle LMN$ の重心を G' とする。

このとき, 次のことを証明せよ。

- (1) G と G' は一致する。
- (2) 等式 $\vec{AL} + \vec{BM} + \vec{CN} = \vec{0}$ が成り立つ。



【解答】 A , B , C , G の位置ベクトルを, それぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{g}$ とし,

L , M , N , G' の位置ベクトルを, それぞれ $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{g}'$ とする。

$$(1) \quad \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{g}' = \frac{\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}}{3}$$

$$\text{また} \quad \vec{l} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\text{よって} \quad \vec{g}' = \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2} + \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$\vec{g} = \vec{g}'$ となるから, G と G' は一致する。 □

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{AL} + \vec{BM} + \vec{CN} &= (\vec{l} - \vec{a}) + (\vec{m} - \vec{b}) + (\vec{n} - \vec{c}) \\ &= (\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}) - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= 3\vec{g}' - 3\vec{g} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

□

一般に, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とし, 2 中線 AM, BN の交点を G とするとき,

$AG : GM = BG : GN = 2 : 1$ を次のように示すことができる。

$AG = s \cdot AM$, $BG = t \cdot BN$ とすると

$AG : GM = s : (1-s)$, $BG : GN = t : (1-t)$

$$\overrightarrow{AG} = s \times \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = (1-t)\vec{b} + t \times \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\text{から } \frac{1}{2}s = 1-t, \quad \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}t$$

$$\text{よって } s = t = \frac{2}{3}$$

