

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】位置ベクトルによって、平面図形の性質を調べることができる。

□ 2直線の交点

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でなく、また平行でないとする。このとき、任意のベクトル $\vec{p}$ は、 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形にただ1通りに表される。よって、次のことが成り立つ。

$$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b} \iff s = s', t = t'$$

応用例題 3) $\triangle OAB$ において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を C 、辺 OB の中点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

【解答】 辺 OB の中点が D なので $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

辺 OA を $2:1$ に内分する点が C なので $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

$AP:PD = s:(1-s)$, $BP:PC = t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD}$$

$$= (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{OB}$$

$$= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{2}{3}t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ から } (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} = \frac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

ここで、 $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で、かつ $\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行でないから

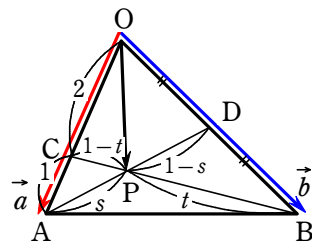
係数を比較する $\rightarrow 1-s = \frac{2}{3}t, \frac{1}{2}s = 1-t$

$$3-3s=2t, s=2-2t$$

$$3-2s=2 \quad \text{より } s=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}=1-t \quad \text{より } t=\frac{3}{4}$$

$$s=\frac{1}{2} \text{ を } ① \text{ に代入して } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$



図形問題のポイント【超重要】

1. 始点をそろえる
2. 基準となるベクトルに統一する

1. この問題なら始点はO

2. $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ に統一する

内分の式の分母は

$s+(1-s)=1$ などとなり省略される

この解き方は

ここを書くのがポイント

「 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立であるから」と、かくこともある

別解 辺 OB の中点が D なので $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

辺 OA を 2 : 1 に内分する点が C なので $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

AP : PD = s : (1 - s), BP : PC = t : (1 - t) とすると

$$\overrightarrow{OP} = (1 - s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OD}$$

$$= (1 - s)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{OB} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$= \frac{3}{2}(1 - s)\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}s\overrightarrow{OB}$$

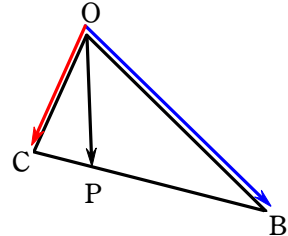
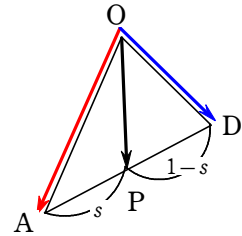
$$\frac{3}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$$

点 C, P, B が一直線上にあるとき係数の和は 1 になるので

$$\frac{3}{2}(1 - s) + \frac{1}{2}s = 1 \quad 2 \text{ 倍して } 3(1 - s) + s = 2$$

$$3 - 3s + s = 2 \quad -2s = -1 \quad \therefore s = \frac{1}{2}$$

よって③に代入すると $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$



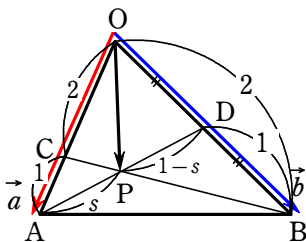
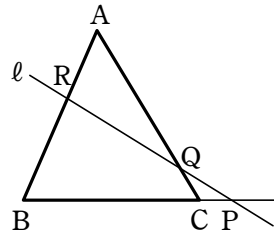
別解

おさらい メネラウスの定理

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長が,
三角形の頂点を通らない直線 ℓ と,
それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

P が辺 BC の延長上にある場合



△OAD と直線 BC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DB}{BO} \cdot \frac{OC}{CA} = 1$$

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$$

であるから $\frac{AP}{PD} = 1$

すなわち $\frac{AP}{PD} = \frac{1}{1}$ より AP : PD = 1 : 1

よって, P は線分 AD の中点である。

したがって $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

メネラウスの定理を使う解答は
記述よりは検算や穴埋め向き