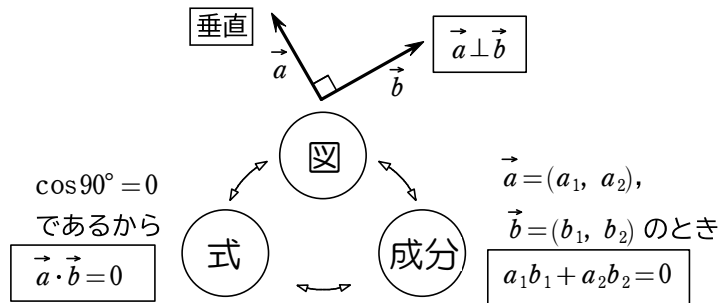


【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】平面上の点の位置をベクトルで表す「位置ベクトル」という考え方が理解できる。

◆◇ 垂直時の内積の関係性 ◇◆



□内積の利用

応用例題 4) 直角三角形でない $\triangle ABC$ の頂点 B, C から, それぞれの対辺 CA, AB またはその延長上に下ろした垂線の交点を H とすると, $AH \perp BC$ であることを証明せよ。

解説 $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ であることから, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ を示す。

証明 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{h}$ とする。

$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ から $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(\vec{h} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

ゆえに $\vec{h} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

よって $\vec{h} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ …… ①

$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ から $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(\vec{h} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

ゆえに $\vec{h} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$

よって $\vec{h} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b}$ …… ②

①, ② から

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{h} \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

$$= \vec{h} \cdot \vec{c} - \vec{h} \cdot \vec{b}$$

$$= \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ であるから $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

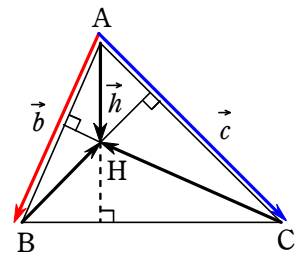
したがって $AH \perp BC$

終

垂直が出てきたら
垂直条件を

A 始点に

$$\square \circ = \triangle \circ - \triangle \square$$



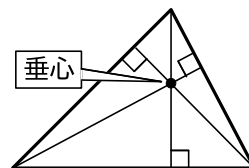
図形問題のポイント【超重要】

1. 始点をそろえる
2. 基準となるベクトルに統一する

1. この問題なら始点はA
2. $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に統一する

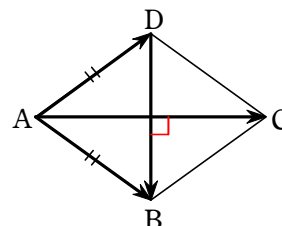
【数学Aのおさらい】

一般に、三角形の3つの頂点から、それぞれの対辺またはその延長上に下ろした垂線は、1点で交わる。この交点を、その三角形の**垂心**という。



例) 平行四辺形 ABCD において、 $AB=AD$ のとき、 $AC \perp DB$ である。このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

隣り合う2辺が等しい平行四辺形はひし形である。
つまり、「ひし形の対角線は垂直に交わる」ことを証明する問題



解答 平行四辺形 ABCD において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とすると

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$$

$AB = AD$ ならば、 $|\vec{b}| = |\vec{d}|$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

したがって、 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ となるから、 $AC \perp DB$ である。