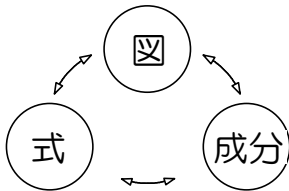


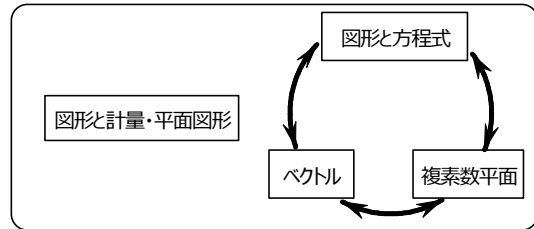
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】位置ベクトルを用いて、直線、円などの図形をベクトルで表すことができる。

◆◇ ベクトルの関係性 ◇◆



◆◇ ベクトルと他の単元の関係性 ◇◆



おさらい問題 点 A (2, 3) を通り、傾きが 4 の直線の方程式を求めなさい。

【解答】 $y - 3 = 4(x - 2)$ より $y = 4x - 5$
 $\therefore 4x - y - 5 = 0$

点 (x_1, y_1) を通り、
 傾きが m の直線の方程式は
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

□ベクトル方程式 ～ 直線と方向ベクトル

座標平面上の直線は、 x, y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ で表される。ただし、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ である。ここでは、位置ベクトルを用いて、平面上の直線を表してみよう。

点 A ($\vec{a}$) を通り、 $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする。

点 P ($\vec{p}$) が直線 g 上にあることは

$$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{d} \text{ または } \overrightarrow{AP} = \vec{0}$$

が成り立つこと、すなわち

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$$

P が動いてできるベクトルは
 $\vec{d}$ の長さを変えたものと等しい

となる実数 t があることと同値である。

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} \text{ であるから } \vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

$$\text{すなわち } \boxed{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}} \quad \dots\dots ①$$

$\vec{a}$ と $\vec{d}$ は定ベクトル、 $\vec{p}$ は動ベクトル
 t は実数値をとる変数

① の式において t がすべての実数値をとって変化すると、

点 P ($\vec{p}$) は右の図のように直線 g 上のすべての点を動く。

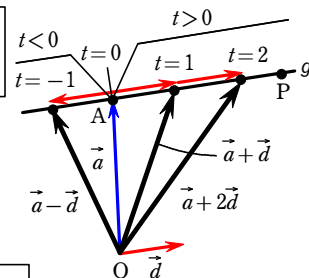
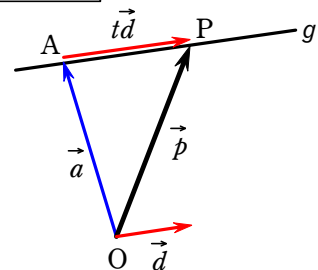
① の式を直線 g の ベクトル方程式 といい、

t を **媒介変数** または **パラメータ** といふ。

また、 $\vec{d}$ を直線 g の 方向ベクトル といふ。

「媒介」とは「双方の間に立って
 とりもつこと。はし渡しをすること。」

Gerade: (独) 直線



直線のベクトル方程式

点 A ($\vec{a}$) を通り、 $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$



ベクトル方程式 ① を、ベクトルの成分を用いて表してみよう。

点 O を座標平面の原点と考えて、点 A の座標を (x_1, y_1) 、直線 g 上の点 P の座標を (x, y) とし、 $\vec{d}=(l, m)$ とすると

$$\vec{a}=(x_1, y_1), \quad \vec{p}=(x, y)$$

であるから、直線 g のベクトル方程式 ① は、次のようになる。

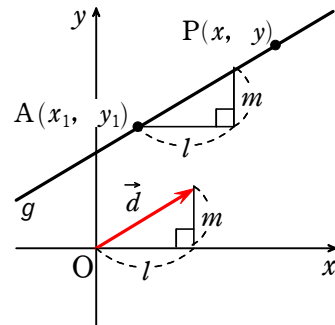
$$(x, y)=(x_1, y_1)+t(l, m)=(x_1+lt, y_1+mt)$$

よって

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \quad \cdots \cdots ②$$

媒介変数 t を用いて表された ② の式を、

直線 g の **媒介変数表示** または **パラメータ表示** という。



赤枠の同じ対象の別表現であり
考える問題によって適切な表現を
選ぶことが大切

② から t を消去すると、次のことが成り立つ。

点 (x_1, y_1) を通り、 $\vec{d}=(l, m)$ が方向ベクトルである直線の方程式は

$$m(x-x_1)-l(y-y_1)=0$$

例 1 4) 点 $A(2, 3)$ を通り、 $\vec{d}=(1, 4)$ が方向ベクトルである直線は、
媒介変数 t を用いて、次のように表される。

$$(x, y)=(2, 3)+t(1, 4)$$

すなわち

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3+4t \end{cases}$$

終

$x_1=2, y_1=3$
 $l=1, m=4$ と見て
代入しても良いが、
覚えるより
つくる方がよいかも

例 1 4において、直線の媒介変数表示から t を消去すると、直線の方程式 $4x-y-5=0$ が得られる。結果的に最初のおさらい問題の結果と一致する。つまり

「点 $A(2, 3)$ を通り、傾きが 4 の直線の方程式」と

「点 $A(2, 3)$ を通り、 $\vec{d}=(1, 4)$ が方向ベクトルである直線のベクトル方程式」

は同じものを指していることから、方向ベクトル $\vec{d}$ は傾きを表すことがわかる。

(この場合は横に 1、縦に 4 動くベクトルだから傾き 4)

おさらい問題 2点 A (6, 1), B (3, 3) を通る直線の方程式を求めなさい。

解答 $y-3=\frac{1-3}{6-3}(x-3)$ より $y=\frac{-2}{3}x+5$
 $\therefore 2x+3y-15=0$

2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は,
 $x_1 \neq x_2$ のとき $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

□異なる2点を通る直線のベクトル方程式

異なる2点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を通る直線を g とする。直線 g は,
 点 $A(\vec{a})$ を通り, ベクトル $\vec{AB}$ に平行な直線と考えられる。

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} = \vec{OA} + t\vec{AB} \\ &= \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})\end{aligned}$$

よって, g のベクトル方程式は,

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

において $\vec{d} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ として, 次のようになる。

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$$

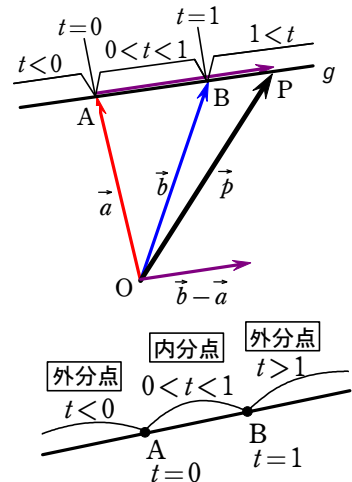
すなわち $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ …… ③

③において, 点 $P(\vec{p})$ の位置は, t の値によって, 上の図のようになる。

よって, $0 \leq t \leq 1$ のとき, ③は線分 AB を表す。

上の方程式 ③において, $1-t=s$ とおくと, ③は次の形に表される。

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{ただし } s+t=1$$



異なる2点を通る直線のベクトル方程式

異なる2点 $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は

$$1 \quad \vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$$2 \quad \vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{ただし } s+t=1$$



異なる2点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ を通る直線は, 上の1の式において

$\vec{p}=(x, y), \vec{a}=(x_1, y_1), \vec{b}=(x_2, y_2)$ として, 次のように表される。

$$(x, y) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)$$

例題 次の直線の媒介変数表示を, 媒介変数を t として求めよ。また, t を消去した式で表せ。

(2) 2点 A (6, 1), B (3, 3) を通る直線

解答 $\vec{p}=(x, y)$ とする

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$ であり $\vec{d}=\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ であるから

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \quad \text{である}$$

これも直線のベクトル方程式なので, 覚えていればここからスタートしてもよい

$$(x, y) = (1-t)(6, 1) + t(3, 3) \quad \text{となるので}$$

$$(x, y) = (6 - 6t, 1 - t) + (3t, 3t)$$

$$(x, y) = (6 - 6t + 3t, 1 - t + 3t)$$

$$(x, y) = (6 - 3t, 1 + 2t)$$

よつて

$$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 12 - 6t \\ 3y = 3 + 6t \end{cases} \text{ なので } \begin{array}{r} 2x = 12 - 6t \\ +) \quad 3y = 3 + 6t \\ \hline 2x + 3y = 15 \end{array}$$

移項して

$$2x + 3y - 15 = 0$$

① [708数学C 練習28]

次の点 A を通り、 $\vec{d}$ が方向ベクトルである直線の媒介変数表示を求めよ。また、媒介変数を消去した式で表せ。

(1) A (3, 2), $\vec{d} = (4, 5)$

(2) A (1, -2), $\vec{d} = (-2, 3)$

解説

(1) $(x, y) = (3, 2) + t(4, 5)$

(2) $(x, y) = (1, -2) + t(-2, 3)$

すなわち $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$

すなわち $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

また、 t を消去すると

$$5x - 4y - 7 = 0$$

また、 t を消去すると

$$3x + 2y + 1 = 0$$

② [708数学C 問11]

次の2点を通る直線の媒介変数表示を求めよ。

(1) A (3, -2), B (-2, 2)

(2) A (4, 0), B (0, 5)

解説

2点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) を通る直線上の任意の点 P(x, y) の位置ベクトルを $\vec{p}$ とする。

(1) $\vec{p} = (x, y)$, $\vec{a} = (3, -2)$, $\vec{b} = (-2, 2)$ であるから

$$(x, y) = (1 - t)(3, -2) + t(-2, 2)$$

$$= (3(1 - t) - 2t, -2(1 - t) + 2t)$$

$$= (3 - 5t, -2 + 4t)$$

すなわち $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

(2) $\vec{p} = (x, y)$, $\vec{a} = (4, 0)$, $\vec{b} = (0, 5)$ であるから

$$(x, y) = (1 - t)(4, 0) + t(0, 5) = (4(1 - t), 5t) = (4 - 4t, 5t)$$

すなわち $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5t \end{cases}$